

分光実験レポート

05-242628 三田村彰大

October 27, 2025

Contents

1	本実験について	3
2	観測課題 1 & 2	3
2.1	理論	3
2.1.1	レイリー基準による理論分解能	3
2.2	実験方法	4
2.3	実験結果	4
2.4	物理量の定量及び誤差の評価	5
2.4.1	波長-ピクセル関係式	5
2.4.2	1ピクセルあたりの波長 $\Delta\lambda_{\text{pix}}$	6
2.4.3	波長決定精度 (理論分解能)	6
2.5	考察	6
2.5.1	理論分解能について	6
3	観測課題 3	7
3.1	理論	7
3.2	実験方法	7
3.3	実験結果	7
3.3.1	H $_{\alpha}$	7
3.3.2	H $_{\beta}$	8
3.3.3	H $_{\gamma}$	9
3.3.4	Na 二重線	10
3.3.5	O $_2$	11
3.3.6	O $_3$ (昼)	12
3.3.7	O $_3$ (夕方)	12
3.4	物理量の定量及び誤差の評価	13
3.4.1	H 線各種の吸収波長	13
3.4.2	Na 二重線の吸収波長	14
3.5	考察	14
3.5.1	H $_{\alpha}$ 線のKr 補正の懸念点	14
3.5.2	Na 二重線の測定におけるNe 波長較正の誤差について	15
4	観測課題 4	17

4.1	理論	17
4.2	実験方法	17
4.3	物理量の定量及び誤差の評価	20
4.3.1	リュードベリ定数	20
4.4	考察	20
5	観測課題5	20
5.1	理論	20
5.2	実験方法	21
5.2.1	酸素コラム密度の推定方法	21
5.2.2	不確かさの推定方法	23
5.3	実験結果	28
5.4	物理量の定量及び誤差の評価	30
5.4.1	酸素分子鉛直コラム密度	30
5.5	考察	30
5.5.1	鉛直コラム密度の妥当性について	30
5.5.2	幾何学補正の修正	31
6	観測課題6	32
6.1	理論	32
6.2	実験方法	32
6.2.1	O ₃ コラム密度の測定	32
6.3	不確かさについて	33
6.4	実験結果	34
6.5	物理量の定量及び誤差の評価	35
6.5.1	オゾンの鉛直コラム密度	35
6.6	考察	35

1 本実験について

本実験は、分光を用いた大気スペクトルの観測を通じて、分光の仕組みや各測定機器の取り扱いを理解することを目的として行われた。また、実験に関する詳細は以下の様。今回用いた装置番号4の分光器については、ソフトウェアのバージョンの問題でカメラの冷却方法が他の班と異なっており、パソコンで CCD カメラのソフトウェアを起動後「冷却パワー出力」になるまで3分ほど待ってから各日の測定を開始した。

実験日時： 観測課題1及び2 …………… 10月6日
観測課題3～6 …………… 10月8日
装置番号： …………… 4
共同実験者： …………… 立谷悠樹

以下ではそれぞれの観測課題ごとに、「実験の理論」「実験方法」「実験結果」「物理量の定量及び誤差の評価」「考察」に分けてその詳細を記述する。

2 観測課題1 & 2

この課題では、Kr ランプを用いることで CCD の画素番号と波長の関係式を得、それにより分光器の分解能を定量することを旨とした。

2.1 理論

本実験の分光器では、出口スリット付近に波長方向に CCD カメラの複数の検出器（画素）が並んだものを用いる。この時、焦点位置での波長方向の結像位置と波長には線形の関係があり*1、等間隔に並んだ CCD カメラの画素と波長の間には線形関係が存在することになる。

よって、あらかじめスペクトルが知られたアルゴンランプを用い各スペクトルがどの画素に現れるかを測定することで、波長一画素の線形関係を得ることができる。

2.1.1 レイリー基準による理論分解能

(※ 教科書で省略されていた議論を補完しているだけです。)

回折格子の分解能をレイリー基準によって定義したとき、理論分解能の式が $\lambda/\Delta\lambda = mN$ となることを証明する。まずレイリー基準とは、あるスペクトルピークがあるときそのピークのすぐ隣にある第一極小点までの距離を分解できる波長の限界とする基準である。

教科書 p.39 式 (4) を参考にすると、波長 λ_1 に m 次光のピークがあるとき、すぐ隣の第一極小点の波長 λ_2 は (4) 式の第一項が次に 0 となる点で、この時 $\sin\beta = \frac{m\lambda_2}{d}$ の値は

$$(\sin\beta =) \frac{m\lambda_2}{d} = \frac{\lambda_1}{d} \left(m + \frac{1}{N} \right) \quad (1)$$

*1 この議論は納得がいかない。p.41 の式 (6) において逆線分散を求める過程で $dx = fd\beta$ という式を用いているが、なぜ分光の角度と結像位置が線形関係にあるのかわからない。複数の文献を調べたが、やはり $dx = f_{\text{cam}}d\beta$ という関係が天下りの与えられるばかりで、なぜそのような関係が成立するのかわからなかった。

となる。よって、

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = mN \quad (2)$$

となり、レイリー基準における理論分解能の式が導かれる。

2.2 実験方法

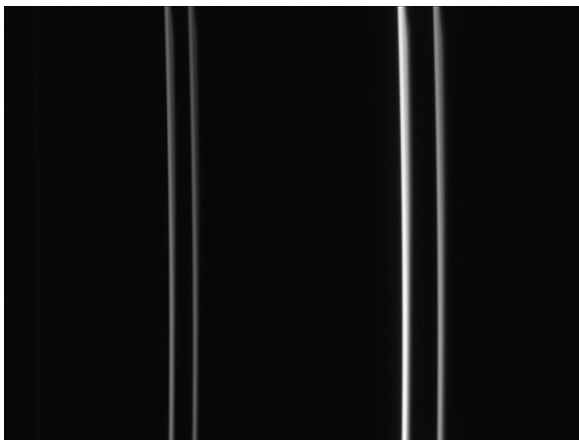
本実験では、Kr ランプを用いる。また、分光装置の波長メモリは 764.2nm が中心になるように揃える。

本実験で行うこととしてはまず、Kr ランプのスペクトルを測定し、あらかじめ与えられたKr のスペクトルデータと比較することで（波長、ピクセル番号）のプロットを得る。次に、最小二乗法により波長 λ とピクセル番号 pix の間の線形関係 $\text{pix} = a \cdot \lambda + b$ を得る。その後、この式を変換することで、最終的に $\lambda = a' \cdot \text{pix} + b'$ の関係式を得る。また、これを用いてこの装置の分解能の定量を行う。^{*2}

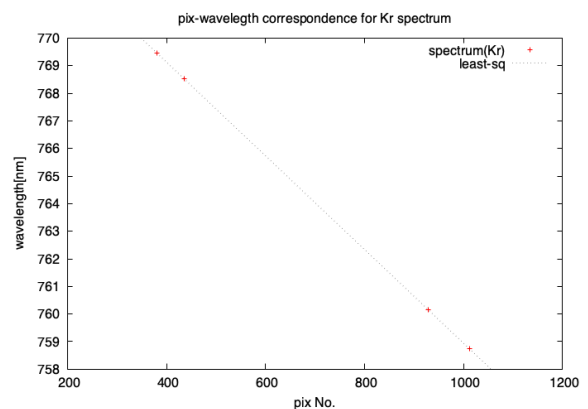
次に、Kr の 760.15 のスペクトルを、スリット幅を様々に変えて測定する。これにより、装置関数および、スリット幅を変化させたときにスペクトルの半値全幅がどのように変化するかを観察する。

2.3 実験結果

波長補正のためのKr ランプのスペクトルは、スリット幅 30nm、露光時間 0.05 秒で行った。また、装置関数の観察のためのスリット幅は、200, 100, 50, 30, 20 で行った。



(a) Kr の 764.2nm 周りのスペクトル, スリット = 50nm

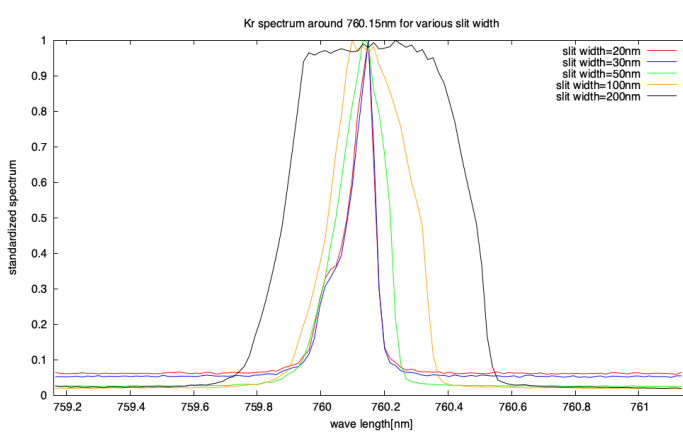


(b) Kr スペクトルの波長—ピクセル番号関係

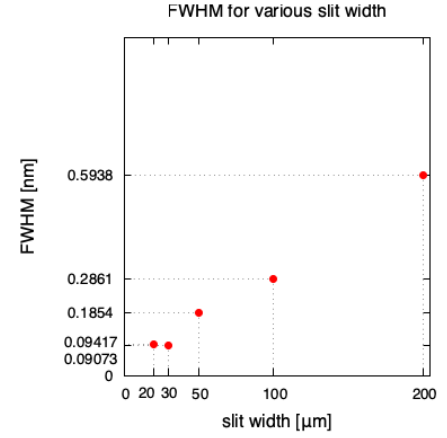
Figure1

上図 (a) は得られたスペクトルの一例である。与えられたKr スペクトルとの対応は、左から 769.45, 768.52, 760.15, 758.74nm である。また、(b) に波長ピクセル番号の関係を示している。図からも、綺麗な線形関係となっていることが見て取れる。

^{*2}いったん $\text{pix} = a \cdot \lambda + b$ を求めてから $\lambda = a' \cdot \text{pix} + b'$ を求めたのは、この実験においては波長 λ が変化しないパラメタで、ピクセル番号 pix が測定により変化するパラメタだから。こうすることで、変化しないパラメタ x_i と測定値 y_i について一般に知られた最小二乗法の式や不確かさの式を流用することができる。



(a) 様々なスリット幅に対するKrの760.15nmのスペクトル



(b) 半値全幅ースリット幅の関係

Figure2

また、上図 (a) は 760.15nm でスリット幅を変えて行った時の装置関数の形の変化を示した図である。(b) に半値全幅とスリット幅の関係をプロットした。具体的な半値全幅の値は図中に与えている。

2.4 物理量の定量及び誤差の評価

2.4.1 波長ーピクセル関係式

まず、Figure 1 (b) により得られた波長ーピクセル番号のデータから、波長 λ とピクセル番号 pix の間に成り立つ関係式を最小二乗法により求めると、

$$\text{pix} = a \cdot \lambda + b, \quad (a = -58.91, \quad b = 4.570 \times 10^4) \quad (3)$$

となっている。また、 a, b の不確かさ σ は、測定値 (pix) の不確かさを σ として、

$$\sigma_a^2 = \frac{n \cdot \sigma^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad \sigma_b^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sigma^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (4)$$

となる。特に今、測定される pix の不確かさは統計的不確かさによる寄与と、メモリの分解能による寄与があると考えられ、統計的不確かさは

$$\sigma_{\text{st}} = \frac{\sum (\text{pix}_i - b - a\lambda_i)^2}{n - 2} \quad (5)$$

であり、メモリの読み取りによる不確かさについては、読み取り値を中心とした $\text{pix}/2$ の一様分布を考えて、

$$\sigma_{\text{mem}} = \frac{\text{pix}/2}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

となると考えられる。よって、測定される pix の不確かさは

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{st}}^2 + \sigma_{\text{mem}}^2} \quad (7)$$

となる。よって、式 (5)(6)(7) を (4) に代入して a, b の不確かさを求めてやると、

$$\sigma(a) = 0.03, \quad \sigma(b) = 0.002 \times 10^4 \quad (8)$$

となる。また、ここから $\lambda = a' \cdot \text{pix} + b'$ の形に直すことを考えると、 $a' = \frac{1}{a}$, $b' = -\frac{b}{a}$ であるから、誤差伝播の式は

$$\begin{aligned} \sigma(a') &= \frac{\sigma(a)}{a^2} \\ \sigma(b') &= \sqrt{\frac{b^2}{a^4} \sigma(a)^4 + \frac{1}{a^2} \sigma(b)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。以上より、求める波長 [nm] –ピクセル番号の関係式は、包含係数を $k = 2$ として

$$\lambda = a' \cdot \text{pix} + b', \quad \left(a' = (-1.697 \pm 0.002) \times 10^{-2}, \quad b' = 776 \pm 1 \right) \quad (10)$$

となる。

2.4.2 1ピクセルあたりの波長 $\Delta\lambda_{\text{pix}}$

上記の議論より、1ピクセルあたりの波長 $\Delta\lambda_{\text{pix}}$ は

$$\Delta\lambda_{\text{pix}} = (-1.697 \pm 0.002) \times 10^{-2} \text{ [nm]} \quad (11)$$

となる。

2.4.3 波長決定精度 (理論分解能)

理論分解能は、代表的な波長 λ として $\lambda = 764.2\text{nm}$ を取れば以下のようになる。

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\text{pix}}} = (4.502 \pm 2) \times 10^4 \quad (12)$$

2.5 考察

2.5.1 理論分解能について

本実験で用いた回折格子の理論分解能の理論値は $R = 6.0 \times 10^4$ であるから、実験の結果得られた理論分解能 4.502×10^4 は理論値より劣っていることがわかる。これは、CCDカメラの分解能による影響であると考えられる。

今、理論分解能の式は、セクション 2.1.1 で示したように、あくまでレイリー基準から与えられるものである。すなわち、 $R = \lambda/\Delta\lambda = 6.0 \times 10^4$ に現れる $\Delta\lambda$ というのは「レイリー基準に基づいて区別することができる最小波長幅」であり、本実験で理論分解能を算出するために用いた $\Delta\lambda_{\text{pix}}$ の「CCDカメラのピクセルにより区別可能な最小波長幅」とは本質的に異なるものである。よって、理論分解能の理論値と実測値に差があるのは当然であり、実測値が理論値に劣るのは、「CCDカメラの画素による分解能がレイリー基準より劣っている」というだけのことであると考えられる。

3 観測課題3

3.1 理論

太陽大気や地球大気中に存在する特定の物質によって太陽からの光が吸収されることによって、大気スペクトルは得意な吸収線を持つ。本実験では実際にそれらの吸収が起こる波長帯付近で大気スペクトルを観測し、これらの吸収スペクトルを実際に観察することを試みる。

3.2 実験方法

スペクトルの測定

まず、観測課題1 & 2で用いたのと同様の手法によって、狙う吸収スペクトル付近での「波長-ピクセル番号」の関係式を定量する。

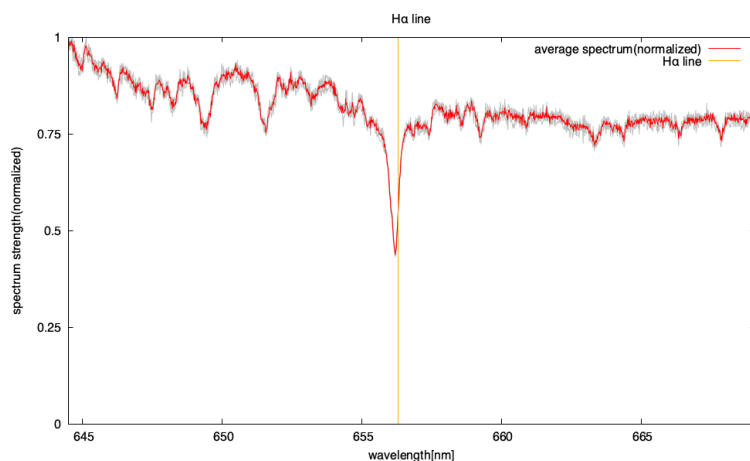
次に、実際の太陽スペクトルを測定する。毎回の測定において、機器由来のノイズを除くためのダーク引きを行う。また、吸収ピーク波長やスペクトル強度を定量するために、一部の測定を除いて各三回、大気スペクトルとダークの測定を行う。この一連の作業により、「ピクセル番号-スペクトル強度」の関係が得られるので、これをさきの波長-ピクセル番号の式を用いて較正することで、「波長-スペクトル強度」の関係に変換し、プロットする。

吸収ピーク波長を求める

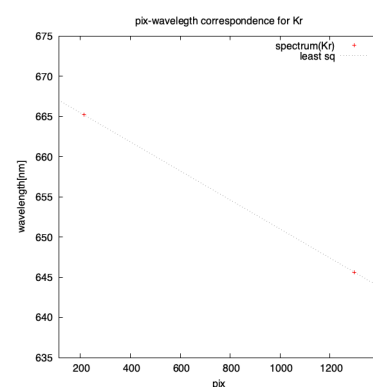
H_{α} 、 H_{β} 、 H_{γ} 、Na 二重線の測定においては、吸収ピークを与える波長を求める必要がある。そのためにはまず、ダーク引きをしたデータにおいて、スペクトル強度が最も小さくなっているピクセル番号 $\text{pix}_{\text{absorb}}$ を.csv データから読み取り、三回の測定の平均をとる。次に、これを波長較正の式を用いて波長 λ_{absorb} に変換すれば、求める吸収ピーク波長を得ることができる。

3.3 実験結果

3.3.1 H_{α}



(a) H_{α} 線吸収スペクトル



(b) Kr ランプ補正における波長-ピクセル番号関係

Figure3

図3aは H_{α} 線の吸収スペクトルを示している。グレーの線は、1～3回目の測定で得られたスペクトルを規格化したもので、赤線はそれらスペクトルの平均である。(規格化は、見やすさのため。 H_{α} 線の測定においては吸収を

与える波長のみに興味があり、スペクトル強度については考えていないので規格化しても問題ない。) グラフを見ると、3回の測定で吸収波長がよく一致していることがわかる。実際、各測定で吸収ピークを与えるピクセル番号は、713, 714, 713 であり、非常に近くなっている。また、オレンジの線は H_{α} 線の理論吸収線 (656.281nm) である。実験で得られた吸収線と理論線の位置はおおよそ一致していると言える。

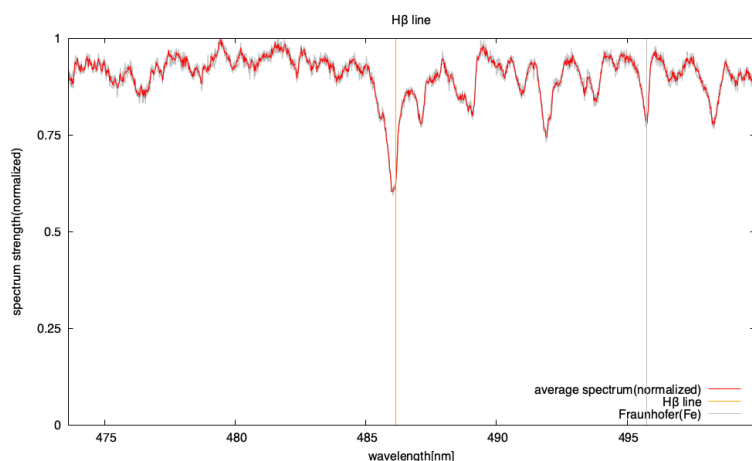
図3bはKr ランプを用いた補正によって得られる「波長-ピクセル番号」関係のプロットである。観測課題1 & 2と同様の手法によってこの関係式を求めると、

$$\lambda = a \cdot \text{pix} + b, \quad \left(a = (-1.807 \pm 0.001) \times 10^{-2}, \quad b = 669.1 \pm 0.7, \quad k = 2 \right) \quad (13)$$

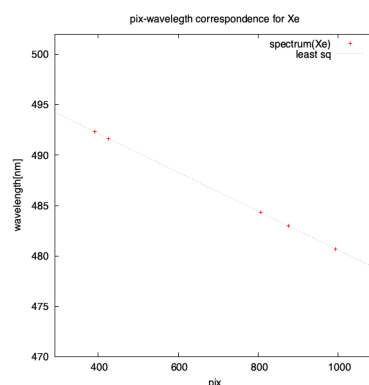
となる。(※ k は包含係数) ただし、このKrの測定においてはスペクトルが二つしか存在しないために、(5)式で示される統計的不確かさを用いることができない。よって測定値の不確かさについては(6)式のメモリによる不確かさのみを考えているが、この影響で不確かさが本来より小さく現れている。(他の波長較正と比べると、不確かさが若干小さくなっていることがわかる)

また、この波長較正においては、本来見られるはずだったスペクトルが観察されないという問題が生じており、これについては後ほど考察する。

3.3.2 H_{β}



(a) H_{β} 線吸収スペクトル



(b) Xe ランプ補正における波長-ピクセル番号関係

Figure4

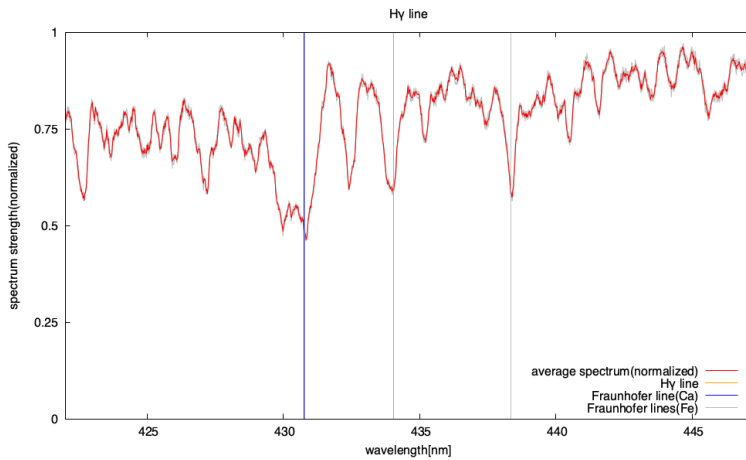
図4aは H_{β} 線の吸収スペクトルを示している。グレーの線と赤色の線については H_{α} と同様。この測定でも、3回の測定で吸収波長がよく一致していることがわかる。実際、各測定で吸収ピークを与えるピクセル番号は、720, 719, 717 であり、非常に近くなっている。また、オレンジの線は H_{β} 線の理論吸収線 (486.133nm) であり、実験で得られた吸収ピークとよく一致している。グレーの縦線は鉄によるフラウンホーファー線 (c: 496.761nm) であり、その存在も実験で確認することができた。

図4bはXe ランプを用いた補正によって得られる「波長-ピクセル番号」関係のプロットである。観測課題1 & 2と同様の手法によってこの関係式を求めると、

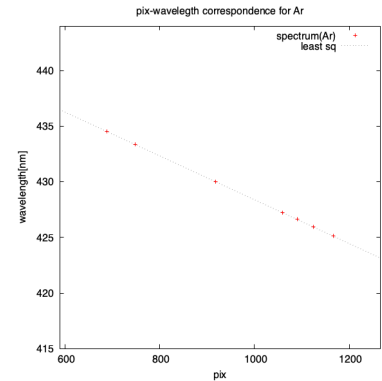
$$\lambda = a \cdot \text{pix} + b, \quad \left(a = (-1.931 \pm 0.004) \times 10^{-2}, \quad b = 499 \pm 1, \quad k = 2 \right) \quad (14)$$

となる。(※ k は包含係数)

3.3.3 H_γ



(a) H_γ 線吸収スペクトル



(b) Ar ランプ補正における波長-ピクセル番号関係

Figure5

Figure5 (a) は H_γ の吸収スペクトルを示している。グレーの線と赤色の線については H_α と同様。この測定でも、三回の測定で吸収波長がよく一致していることがわかる。実際、各測定で吸収ピークを与えるピクセル番号は、716,717,715 であり、非常に近くなっている。

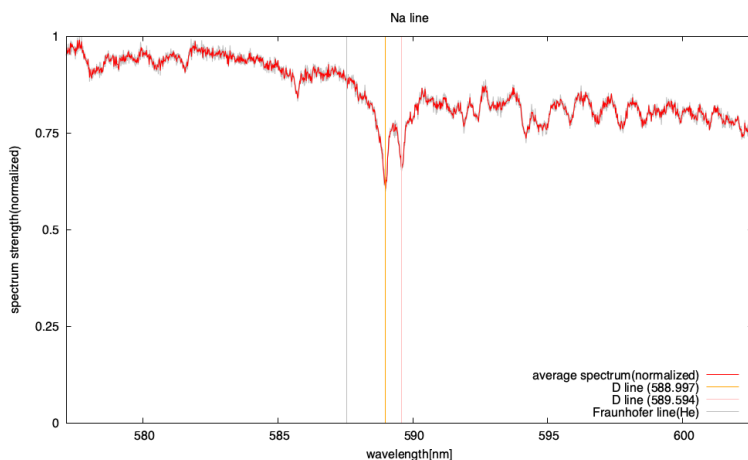
オレンジの線は H_γ 線の理論吸収線 (434.048nm) であり、実験で得られた吸収ピークとよく一致している。グレーの縦線は鉄によるフラウンホーファー線 (e : 438.355nm) で、青の縦線はカルシウムによるフラウンホーファー線 (g : 430.774nm) である。見えにくいだが、青の縦線はグレーの縦線に重なっており、これは別の鉄によるフラウンホーファー線 (G : 430.790nm) である。実験では、これらのスペクトルがしっかり観測されていることがわかる。

Figure5 (b) は Ar ランプを用いた補正によって得られる「波長-ピクセル番号」関係のプロットである。観測課題 1 & 2 と同様の手法によってこの関係式を求めると、

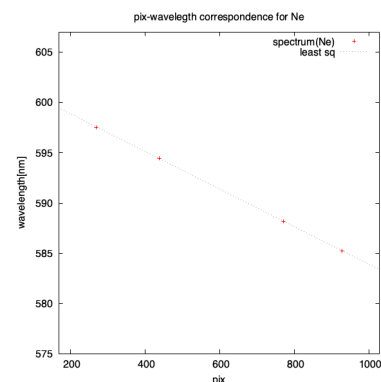
$$\lambda = a \cdot \text{pix} + b, \quad \left(a = (-1.971 \pm 0.004) \times 10^{-2}, \quad b = 448 \pm 1, \quad k = 2 \right) \quad (15)$$

となる。(※ k は包含係数)

3.3.4 Na 二重線



(a) Na 線吸収スペクトル



(b) Ne ランプ補正における波長-ピクセル番号関係

Figure6

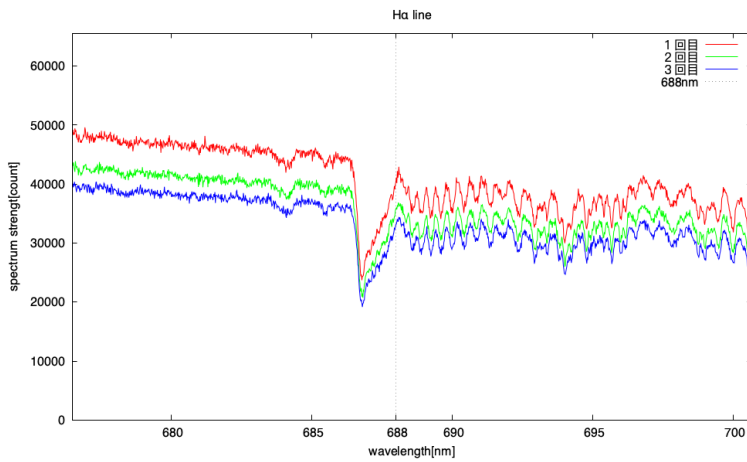
Figure6 (a) はNa 二重線の吸収スペクトルを示している。赤線の下に見えるグレーの線が各 2 回の測定により得られたスペクトル（規格化）であり、赤線はそれら規格化されたスペクトルを平均したもの。規格化した理由は H_{α} と同様。スペクトルの重なり具合から、2 回の測定で吸収波長がよく一致していることがわかる。実際、各測定において吸収ピークを与えるピクセル番号は、短波側の吸収線が 728,728、長波側の吸収線が 697,696 となっており、よく一致している。また、オレンジ・ピンクの線がNa 二重線の理論吸収線（588.997nm、589.594nm）であり、グレーの縦線はヘリウムによるフラウンホーファー線（d：587.561nm）である。実験では、Na 二重線については理論線の位置にしっかり吸収ピークが確認されているが、ヘリウムのフラウンホーファー線は確認されなかった。

Figure6 (b) はNa ランプを用いた補正によって得られる「波長-ピクセル番号」関係のプロットである。観測課題 1 & 2 と同様の手法によってこの関係式を求めると、

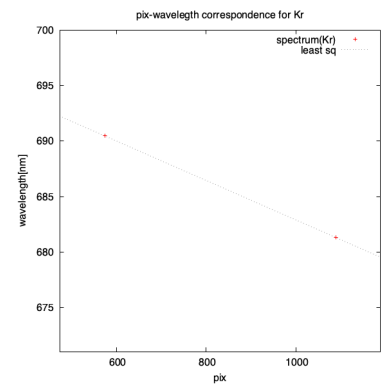
$$\lambda = a \cdot \text{pix} + b, \quad \left(a = (-1.87 \pm 0.02) \times 10^{-2}, \quad b = 602 \pm 9, \quad k = 2 \right) \quad (16)$$

となる。（※ k は包含係数）他の波長較正に比べて、不確かさが桁一つ大きくなっているが、この理由については考察で述べる。

3.3.5 O₂



(a) O₂ 帯吸収スペクトル



(b) Kr ランプ補正における波長ーピクセル番号関係

Figure7

Figure7 (a) はO₂ 吸収帯の吸収スペクトルを示している。赤、緑、青の線がそれぞれ一回目、二回目、三回目の測定に対応している。(これまでの測定と違い、スペクトル強度も重要になってくるため、規格化はしなかった。また、吸収ピークを与える波長に注目しているわけではないため、三回の測定の平均スペクトルをプロットすることはしていない。)

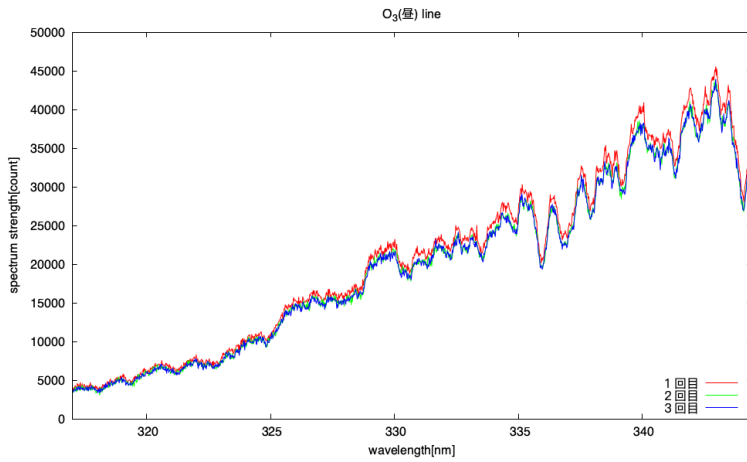
スペクトルを見ると時間を追うごとにスペクトル強度が弱くなっていっていることがわかるが、原因としては雲の影響や太陽の動きの影響などが考えられる。また、縦線は 688nm 線であり、いずれの測定においても、その両サイドに R 枝と P 枝を見てとることができる。

Figure7 (b) はKr ランプを用いた補正によって得られる「波長ーピクセル番号」関係のプロットである。観測課題 1 & 2 と同様の手法によってこの関係式を求めると、

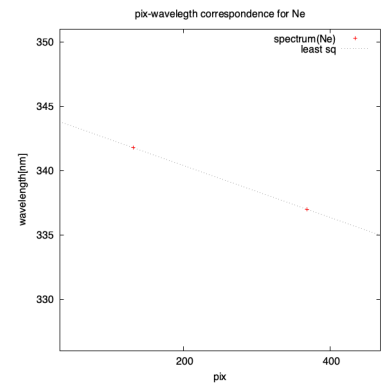
$$\lambda = a \cdot \text{pix} + b, \quad \left(a = (-1.778 \pm 0.002) \times 10^{-2}, \quad b = 700 \pm 2, \quad k = 2 \right) \quad (17)$$

となる。(※ k は包含係数) この測定においても、H _{α} 線のKr 補正と同様に、スペクトルが二つしか存在しないために (5) 式で示される統計的不確かさを用いることができない。よってやはり、メモリによる不確かさのみを考えることになるが、これにより不確かさが小さく見積もられてしまっている可能性がある。

3.3.6 O₃(昼)



(a) O₃ 帯吸収スペクトル



(b) Ne ランプ補正における波長ーピクセル番号関係

Figure8

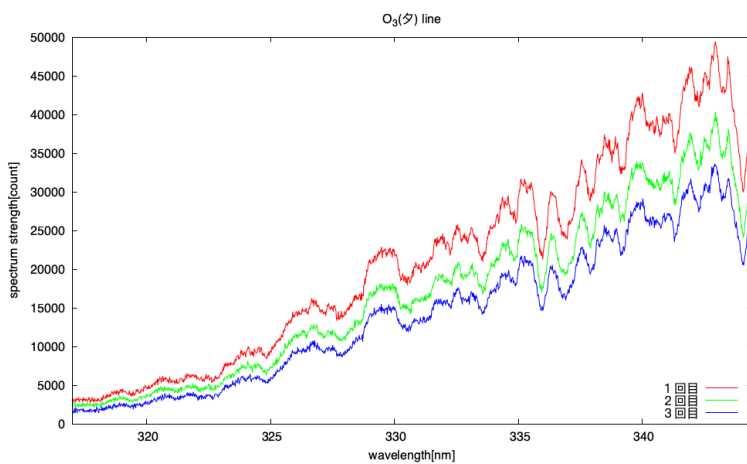
Figure8 (a) はO₃ 吸収帯の吸収スペクトルを示している。赤、緑、青の線がそれぞれ一回目、二回目、三回目の測定に対応している。

Figure8 (b) はNe ランプを用いた補正によって得られる「波長ーピクセル番号」関係のプロットである。観測課題 1 & 2 と同様の手法によってこの関係式を求めると、

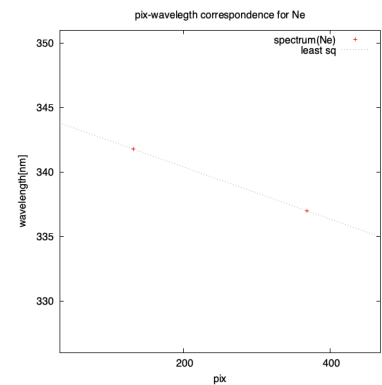
$$\lambda = a \cdot \text{pix} + b, \quad \left(a = (-2.016 \pm 0.007) \times 10^{-2}, \quad b = 344 \pm 2, \quad k = 2 \right) \quad (18)$$

となる。(※ k は包含係数) サンプル数が2であるため、不確かさについては H _{α} , O₂ の場合と同様の注意が必要なおことに留意する。

3.3.7 O₃(夕方)



(a) O₃ 帯吸収スペクトル



(b) Ne ランプ補正における波長ーピクセル番号関係

Figure9

Figure9 (a) は夕方におけるO₃ 吸収帯の吸収スペクトルを示している。赤、緑、青の線がそれぞれ一回目、二回目、三回目の測定に対応している。各測定間の時間間隔は5分であり、時間が経つごとにスペクトルが弱くなっていく様子が観測された。この原因としては、雲の動きや太陽天頂角の変化などが考えられる。尚、昼と夜の測定でスペクトルの強度の最大値はおおよそ 45,000count 程度で一致しているが、これは夕方の測定において露光時間を長く取ったためである。

Figure9 (b) はNe ランプを用いた補正によって得られる「波長ーピクセル番号」関係のプロットである。観測課題 1 & 2 と同様の手法によってこの関係式を求めると、

$$\lambda = a \cdot \text{pix} + b, \quad \left(a = (-2.016 \pm 0.007) \times 10^{-2}, b = 344 \pm 2, k = 2 \right) \quad (19)$$

となる。(※ k は包含係数) 昼の場合と式が全く一致しているのは、波長のスペクトルが観測されたピクセル番号が完全に一致したためである。サンプル数が2であるため、不確かさについては H_α, O₂ の場合と同様の注意が必要なことに留意する。

3.4 物理量の定量及び誤差の評価

3.4.1 H 線各種の吸収波長

バルマー系列の各種吸収波長を得るプロセスを、H_α 線を例にとって解説する。

今、三回の測定により吸収ピークを与えるピクセル番号が $\text{pix}_1, \text{pix}_2, \text{pix}_3$ として与えられているとする。この時、その平均 $\overline{\text{pix}}$ を代表値として採用すると、その不確かさにはメモリ読み取りによる不確かさ σ_{mem} と標準不確かさ (不偏標準偏差) σ_{stat} の寄与があると考えることができ、

$$\sigma(\overline{\text{pix}}) = \sqrt{\sigma_{\text{mem}}^2 + \sigma_{\text{stat}}^2} \quad (20)$$

によってその不確かさを求めることができる。ただし、メモリ分解能による読み取り不確かさの考え方は、2.4.1 と同様、メモリを中心とする一様分布を考えるものとする。

これと、波長ーピクセル番号の関係式 $\lambda(\text{pix}) = a \cdot \text{pix} + b$ を持ちいれば、求める吸収ピーク波長がもとまる。この時、不確かさは $\overline{\text{pix}}, a, b$ からそれぞれ伝播すると考えることができ、

$$\sigma(\lambda) = \sqrt{\overline{\text{pix}}^2 \sigma(a)^2 + a^2 \sigma(\overline{\text{pix}})^2 + \sigma(b)^2} \quad (21)$$

となる。

よって、以上の方法により求めた吸収波長を求めると以下のようなになる。

吸収線	吸収波長 (実測値) [nm]	不確かさ ($k = 1$) [nm]	吸収波長 (文献値) [nm]	誤差 [%]
H _α 線	656.2	0.4	656.281	-0.01
H _β 線	486.0	0.7	486.133	-0.02
H _γ 線	434.0	0.6	434.048	-0.01

いずれも誤差は 0.01% のオーダーであり、包含係数 $k = 1$ の不確かさの範囲内で十分文献値と一致していることがわかる。

3.4.2 Na 二重線の吸収波長

Na 二重線の吸収波長についても、H 線と同様のプロセスを用いて求めることができる。結果は以下のよう。

吸収線	吸収波長 (実測値) [nm]	不確かさ ($k = 1$) [nm]	吸収波長 (文献値) [nm]	誤差 [%]
D ₁ 線	589.584	4	589.594	-0.002
D ₂ 線	588.994	4	588.997	-0.0005

結果を見ると、実測値と文献値が不確かさの範囲内で一致していることがわかる。しかし、不確かさが非常に大きくなっており、精度に疑問が持たれる。

※ 本来測定値の表示は不確かさの桁までとすべきだが、今回のNa の測定では先に述べたように波長較正による不確かさが桁一つ大きく出てしまっており、この基準に従うと一の位までの表示となってしまう。しかしこれでは実測値と文献値の誤差が見づらいため、今回はあくまで参考として、小数点以下3桁を表示とした。実際には、D₁ 線の測定値は 589 ± 4 [nm] であり、D₂ 線の測定値は 590 ± 4 [nm] である。

(※ 教科書訂正：教科書 p.25 の D₁、D₂ 線の波長がテレコになっています。)

3.5 考察

3.5.1 H_α 線のKr 補正の懸念点

H_α 線の測定に際してKr ランプによる補正を行ったが、この際観測されるスペクトルに不自然な点が見られたためここで報告する。

まず、このKr 補正に関しては、分光器の波長メモリを 656.28nm に調整した。よって、この波長が中心ピクセル (ピクセル番号: $1360/2 = 680$) に来ると考えられた。さらに、観測課題 1 & 2 によって、この分光器では $\Delta\lambda_{\text{pix}} \approx 0.017\text{nm} \cdot \text{pix}^{-1}$ となっていることがわかっているため、ccd カメラにはおおよそ 644 – 667nm の光が映るということが予想された。よって、ccd カメラには、左端に 665.22nm、中心に 657.01nm、右端に 645.63nm の計三つのスペクトルが確認されるはずであった。しかし、実際に確認されたスペクトルは下図のようになった。



Figure10: Kr ランプによるスペクトル

これを見ると、明らかに、本来画面中央に存在していなければならない 657.01nm が見えていない。

この原因として、「分光器の波長メモリの調整を間違えている」「文献が間違っている」「なんらかの原因によって657.01nmのスペクトルが観測できなかった」といった可能性が考えられる。

まず、「分光器の波長メモリの調整を間違えている」、すなわち分光器の中心にくる波長を656.28nmに調整したつもりが実際には異なる波長に設定してしまっていて波長較正が間違っているという可能性だが、この可能性は低いと考えられる。これは、左端の665.22nmと右端の645.63nmのスペクトルが実際に想定される位置にしっかり確認されていることや、波長較正を用いて得られた H_{α} の吸収波長が非常に高い精度で得られているためである。

次に、「文献が間違っている」、すなわち教科書で与えられたKrのスペクトルが間違っているという可能性だが、これも可能性は低いと考えられる。これは、NIST Atomic Spectra Database*3に657.007nmのスペクトルの存在が記されているためである。

よって、今回のスペクトルの不自然さの原因としては、「なんらかの原因によって657.01nmのスペクトルが観測できなかった」が最も妥当な考察であると思われる。この時、自然な考え方として、657.01nmのスペクトルが弱すぎて観測されなかったという可能性が考えられる。しかし、得られた波長較正の式を用いれば、このスペクトルが観測されるはずだったピクセル番号は668.4であると分かり、実際に得られたスペクトルのcsvデータをプロットしてみると下図のようになる。

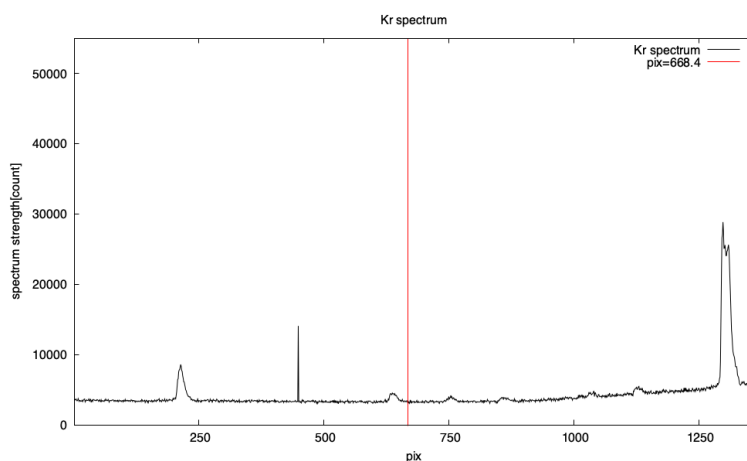


Figure11: Kr ランプによるスペクトル

図を見てみると、668.4nmにはスペクトルが存在していない。668.4pix付近ではスペクトルは完全に平坦であり、「スペクトルが存在するが弱すぎてFigure10で確認できなかった」というわけでもなさそうである。よって657.01nmのスペクトルは本観測において「完全に」存在しておらず、またそれを説明するに足る理由も思い当たらない。*4今回はこれ以上の考察は断念する。

3.5.2 Na 二重線の測定におけるNe 波長較正の誤差について

Na 二重線の測定において、Ne ランプによる波長構成を行ったが、この際波長較正の式 $\lambda = a \cdot \text{pix} + b$ の a, b の不確かさが他の実験の場合より一桁大きくなってしまっている。この影響により、Na 二重線の吸収波長を求めた際も、不確かさがバルマー系列のそれに比べて一桁大きくなってしまっている。今回はこの原因について考察する。

今回、波長較正の式を求めるにあたり、 (λ, pix) データを最小二乗法を用いて直線フィッティングした。その時の pix の値と回帰直線による推定値 $\hat{\text{pix}}$ の差を求めてやると、

*3 https://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/kryptontable2_a.htm

*4完全に迷宮入りである。

波長 [nm]	ピクセル番号 pix (実測値)	ピクセル番号 $\hat{\text{pix}}$ (回帰直線による推定値)	差 $\text{pix} - \hat{\text{pix}}$
585.25	928	928.009	-0.003
588.19	770	770.972	-1
594.48	438	435.000	+3
597.55	269	271.019	-2

のようになっている。表をみると、明らかに $\lambda = 594.48\text{nm}$ のスペクトルに対し測定されたピクセル番号が + 方向に外れている。この様子を絵にすると、

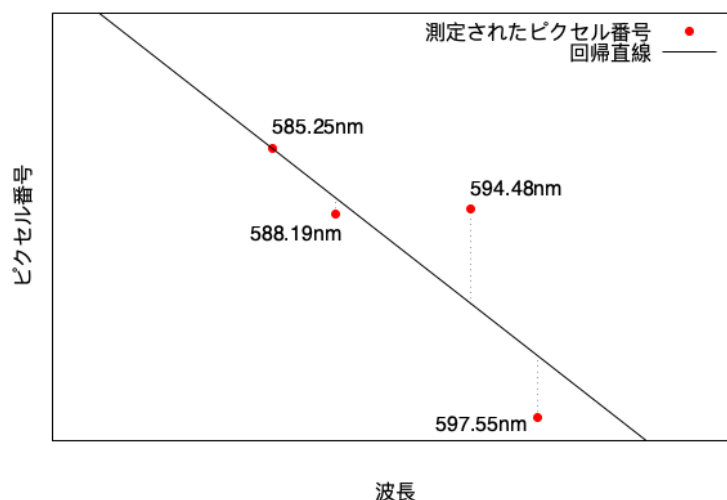


Figure12: 測定値のズレの模式図

のよう。すなわち、594.48nm のスペクトルのズレのせいで、回帰直線が上方に引っ張られ、不確かさが大きくなってしまっていると推察される。

以上の考察を踏まえて、594.48nm の測定データを抜いて今一度波長校正の式を計算してみると、データを抜く前と後で次のように不確かさが変化する。

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{bef}} &= a \cdot \text{pix} + b, \quad \left(a = (-1.87 \pm 0.02) \times 10^{-2}, \quad b = 602 \pm 9, \quad k = 2 \right) \\ \lambda_{\text{aft}} &= a \cdot \text{pix} + b, \quad \left(a = (-1.867 \pm 0.004) \times 10^{-2}, \quad b = 602.6 \pm 0.8, \quad k = 2 \right) \end{aligned} \quad (22)$$

594.48nm の測定値を除外したことで、不確かさが一桁小さくなり、他の測定とオーダーが揃っていることが確認できる。よって、この事情を考慮して、Ne ランプの 594.48nm のスペクトルの測定値は除外するべきであると判断し、得られた新たな波長校正の式を用いて今一度 Na 二重線の吸収ピークの計算を行うと、結果は以下のようになる。

吸収線	吸収波長（実測値）[nm]	不確かさ（ $k = 1$ ）[nm]	吸収波長（文献値）[nm]	誤差 [%]
D ₁ 線	589.6	0.8	589.594	-0.001
D ₂ 線	589.0	0.8	588.997	-0.0005

吸収波長には当然変化はないが、不確かさが小さくなっており、実測値と測定値が一致しているとより自信を持って言えるようになっている。

4 観測課題 4

4.1 理論

今、波長 λ [nm] に対してリュードベリ定数 R_H [cm^{-1}] は

$$R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = \frac{10^{-2}}{n_{\text{Air}} \cdot (\lambda \times 10^{-9})} \quad (23)$$

と表される。（ただし n_{Air} は空気中の屈折率） λ は観測課題 3 によりわかっているので、これを用いて R_H を求めることができる。

4.2 実験方法

具体的な実験方法の説明の前に、一般の間接測定の手法について考察しておきたい。^{*5}

間接測定による測定値及び誤差の推定方法について

唐突ではあるが、今一般に、 x という物理量を測定して物理量 $f(x)$ を間接測定する状況を考える。この時、「平均を取ってから式に代入すべきか、式に代入してから平均を取るべきか」と言う問題について考えたい。言い換えれば、 $f(x)$ を得る方法として x を平均してから f を求める方法と、 $f_i = f(x_i)$ をそれぞれ求めてから f を平均する方法（すなわち、以下の二つ）のどちらを用いるのが良いかを考えたい。

$$\begin{aligned} \overline{f(x_i)} &= \frac{1}{n} \sum f(x_i) \\ f(\bar{x}) &= f\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right) \end{aligned} \quad (24)$$

（※ 今、

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}} (x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\bar{x}} (x_i - \bar{x})^2 + \dots \\ \rightarrow \overline{f(x_i)} &= f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{\bar{x}} V(x) + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

^{*5}考察の動機：観測課題 5 を考えるにあたって、各測定回の O_2 の等価吸収幅を平均してからコラム密度を計算すべきなのか、各測定回に対してコラム密度を求めてから平均を取るべきなのか迷った。しかし、文献を漁っても答えが出てこなかったので、自分なりに考察を行った。

のようであるから、 $\overline{f(x_i)}$ と $f(\bar{x})$ は値として一致しない。

そもそも、 f の真の値は x の真の値 x_{true} を用いて $f(x_{\text{true}})$ と表されるはずで、 \bar{x} は $E(\bar{x}) = x_{\text{true}}$ として x_{true} を期待値にもつ量であるから、 $f(\bar{x})$ を用いた方が良いように思われる。

また、不確かさの観点からも、 $f(\bar{x})$ を用いた方が良いように思われる。以下にその理由を説明する。まず、 $\overline{f(x_i)}$ を用いた場合の不確かさについてだが、この場合、

$$\sigma_1(\bar{f}) = \sigma_{\text{std}}(\bar{f}) = \sqrt{\frac{\sum (f_i - \bar{f})^2}{n-1}} \quad (26)$$

のように \bar{f} の標準不確かさを用いる方法が考えられる。逆に、 $f(\bar{x})$ を用いた場合の不確かさとしては、

$$\sigma_2(f) = \sigma(f(\bar{x})) = \sqrt{\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)^2 \sigma(\bar{x})^2} \quad (27)$$

のように、 \bar{x} の不確かさを伝播させていく方法が考えられる。今、近似的に $\overline{f(x_i)} \approx f(\bar{x})$ が成立するとし、 $\mathcal{O}((x_i - \bar{x})^2)$ は無視できると仮定すると、(26) 式は、

$$\begin{aligned} \sigma_1(\bar{f}) &= \sqrt{\frac{\sum (f_i - \bar{f})^2}{n-1}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\sum (f(x_i) - f(\bar{x}))^2} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\sum \left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)^2 (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)^2 \sqrt{\sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}} \\ &= \sqrt{\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)^2 \sigma_{\text{std}}(\bar{x})^2} \end{aligned} \quad (28)$$

となる。また、 $\sigma(\bar{x})^2 = \sigma_{\text{std}}(\bar{x})^2 + \sigma'(\bar{x})^2$ のように、 \bar{x} の不確かさが標準不確かさとそれ以外の不確かさ $\sigma'(\bar{x})$ の総合不確かさとして表される時、(27) 式は

$$\begin{aligned} \sigma_2(f) &= \sqrt{\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)^2 \sigma(\bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}\right)^2 (\sigma_{\text{std}}(\bar{x})^2 + \sigma'(\bar{x})^2)} \end{aligned} \quad (29)$$

のように表される。よって、それぞれ見比べると、 $\sigma_1(\bar{f})$ と $\sigma_2(f)$ の間には、標準不確かさでは現れない不確かさ $\sigma'(\bar{x})$ の分だけの差が存在していることがわかる。この $\sigma'(\bar{x})$ は、 n を十分大きくしても消えない不確かさ（系統誤差や、メモリの読み取り限界による不確かさ）である。 $n \rightarrow \infty$ で $\sigma_1(\bar{f})$ は 0 へ近づくのとは対照的に、 $n \rightarrow \infty$ でも $\sigma_2(f)$ では $\sigma'(\bar{x})$ の項が残り、不確かさが 0 になることはない。

よって、今 \bar{x} の不確かさに系統誤差やメモリ読み取り誤差などの「繰り返し測定で小さくすることができない」不確かさがあるとき、 f を各測定について求めてから平均を取るやり方ではその不確かさの影響を f の不確かさに反映させることができない。よって、 f の値として $f(\bar{x})$ を用いた方がよいと考えることができる。

以上の考察を踏まえると、 $\overline{f(x_i)}$ ではなく $f(\bar{x})$ を用いた方が良く、すなわち「先に平均を取ってから式に代入した方が良い」ように思われる。しかし、誤差伝播で不確かさが大きくなってしまうような場合（数値安定性が悪い場合）は注意しなければならない。例えば今、 x として二次元データ (A, B) を考え、 $f(x)$ としてその差分 $A - B$ を考えるとき、 f は A, B の値によっては数値的に不安定になってしまう。すなわち、 A, B の不確かさを f に伝播させることを考えた時に、

$$\frac{\sigma(f)}{f} = \frac{\sqrt{\sigma(A)^2 + \sigma(B)^2}}{A - B} \quad (30)$$

のような関係になっていることから A と B が非常に近い場合（すなわち $A - B$ が非常に小さい場合） f の不確かさ $\sigma(f)$ が対 f 比で無限におおきくなってしまう。この場合は逆に、測定値として $\overline{f(x_i)}$ を用い不確かさとして \bar{f} の標準不確かさを採用すれば、 f の形による相対誤差の増大を心配する必要はなくなる。^{*6}

ここまでの議論をまとめると、 $\overline{f(x_i)}$ と $f(\bar{x})$ のどちらを用いるべきかと言う問題については、以下のように考えることができる。

- f の値の妥当性の観点からも、不確かさの観点からも、「式に代入する前に平均を取る」、すなわち $f(\bar{x})$ を用いる方が望ましい。
- しかし、 f の数値安定性が悪く、計算によって相対的に不確かさが大きくなってしまう場合は、「式に代入してから平均を取る」、すなわち $\overline{f(x_i)}$ を用いる方が良い。

次に、ここからさらに議論を発展させて、 f が複数の関数に分解できる場合を考える。すなわち、

$$f(x) = (f_n \circ \dots \circ f_1)(x) \quad (31)$$

のような間接測定を考える。実際のイメージとしては、測定によって x を求めた後、複数ステップの計算 f_1, f_2, \dots を経て最終的な測定値 $f(x)$ を得る場合である。この時、先の「平均値をとってから式に代入すべきか、式に代入してから平均を取るべきか」と言う問題は、「繰り返し測定で得た値を、どの段階で平均に集約させるべきか」と言う問題に置き換わる。先ほどの考察をそのまま拡張すれば、自然に以下のような考えが導かれる。

- 平均に集約させるタイミングは早ければ早いほど良い。
- しかし、ある計算ステップ f_i の数値安定性が悪い場合は、 f_i より前の段階で平均に集約させることは諦めるべきである。

以降、観測課題4～6では、この考え方に従って誤差の計算を行うことにする。^{*7}

R_H の推定について

R_H を求める場合に、上の議論がどう適用されるのかを考える。今、

$$R_H(x) = \frac{10^7}{n_{\text{Air}}} \left\{ \lambda \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \right\}^{-1} \quad (32)$$

^{*6}以下では、「計算により相対的な誤差が拡大してしまう様」を称して、「数値安定性が悪い」ということにする。厳密には、桁落ちといった数値計算の話とは別の問題なので、この言葉を用いるのは怪しい気もする。しかし、文意が伝わりやすい気がするので数値安定性という言葉を用いることにする。

^{*7}この問題に関する文献が全然見当たらなかったため、参考になる教科書などあれば紹介してほしいです…

であり、 n_i は λ ごとに異なるので、「測定値を平均に集約できる一番早い計算ステップ」は、

$$x = \lambda \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (33)$$

と言う量に関してである。また、以降 x から R_H を用いる過程で、数値安定性が悪い計算ステップは見当たらない。よって、 x について平均を取ってしまってもいいと考えられる。

よって、観測課題3で求めたバルマー系列の吸収波長 $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma$ から $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma$ を求め、その平均 \bar{x} を算出し、(32)式に従って $R_H(\bar{x})$ を求める。また、不確かさは観測課題3で各吸収波長について求めた $\sigma(\lambda_i)$ を出発点とし、以下の誤差伝播の式に従って求めることができる。

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) &= \sigma(\lambda_i) \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\ \sigma(\bar{x}) &= \frac{1}{3} \sqrt{\sigma(x_\alpha)^2 + \sigma(x_\beta)^2 + \sigma(x_\gamma)^2} \\ \sigma(R_H) &= \frac{10^7}{n_{\text{Air}}} \frac{\sigma(\bar{x})}{\bar{x}^2} \end{aligned} \quad (34)$$

4.3 物理量の定量及び誤差の評価

4.3.1 リュードベリ定数

実験方法で述べた方法によりリュードベリ定数を計算すると、結果は以下のようになる。（※ k は包含係数）

	実測値 [cm^{-1}]	不確かさ ($k = 2$) [cm^{-1}]	文献値 [cm^{-1}]	誤差 [%]
R_H	1.097×10^5	0.002×10^5	1.09677576×10^5	0.01

結果を見ると、測定値は不確かさの範囲内で文献値に一致している。また、不確かさの桁に四捨五入する前の R_H は

$$R_H = 1.09697799 \times 10^5 \text{ cm}^{-1} \quad (35)$$

であり、教科書にある通り波長決定精度程度（この場合4桁）、文献値と一致していることがわかる。

4.4 考察

実測値と文献値はよく一致している。^{*8}

5 観測課題5

5.1 理論

今、スペクトルの強度に着目し等価吸収幅を計算することで、大気中の物質の濃度を求めることができる。

*8やった！

5.2 実験方法

5.2.1 酸素コラム密度の推定方法

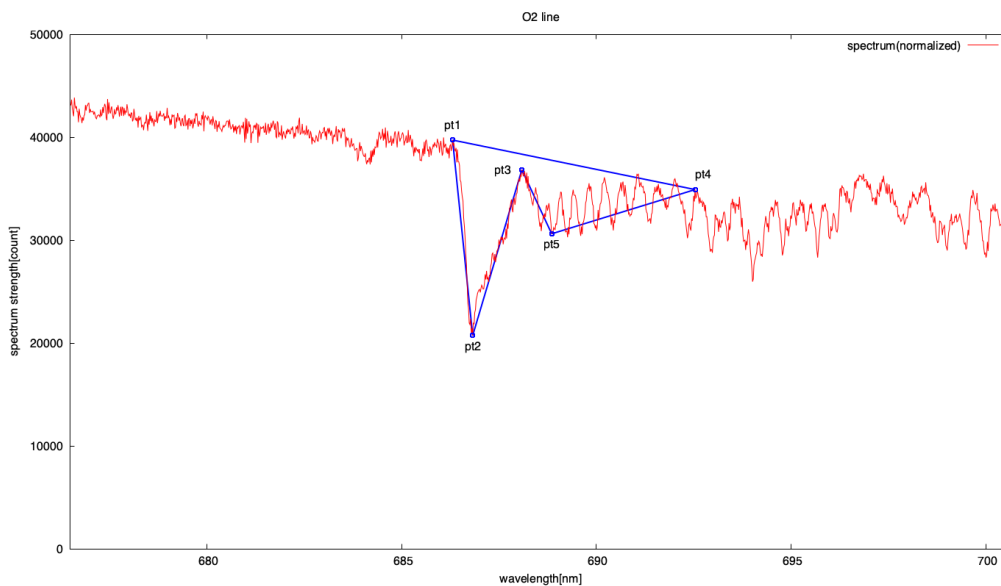


Figure13: O₂ 帯スペクトル

図13はO₂ 帯の二回目の測定で得られたスペクトルである。この図を用いて、酸素分子コラム密度を測定する方法を説明する。

等価吸収幅の算出

まず、図13の青線で囲まれた図形 S の面積を求めることを考える。「帯原点を基準に長波側に n 回山と谷を越えたあとに現れる最初のピークを pt_4 と定める」のように、S の取り方に明確な基準を与えることで計三回の測定にできるだけ一貫性を持たせるようにした。今、S を取り出すと、下図のようになっている。

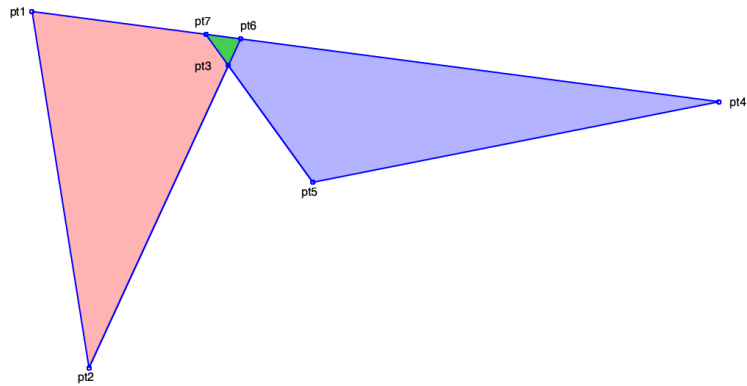


Figure14: 図形 S

(pt1,pt2,pt6) で囲まれた赤い三角形を S_1 、(pt7,pt4,pt5) で囲まれた青い三角形を S_2 、(pt3,pt6,pt7) で囲まれた緑色の三角形を S_3 とすれば、

$$S = S_1 + S_2 - S_3 \quad (36)$$

である。今、三角形において三つの頂点の座標が分かればピタゴラスの定理により 3 辺の長さ a, b, c がわかり、3 辺の長さ a, b, c がわかれば以下のヘロンの公式により三角形の面積がもとまる。

$$(\text{三角形の面積}) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2} \quad (37)$$

よって、 $pt_1 \sim pt_7$ までの座標 (波長 [nm], スペクトル強度 [count]) が全て分かれば、青線で囲まれた図形 S の面積は求まることになる。

今、S の面積が求まれば、帯原点 (pt_3) の高さを基準に等価吸収幅を求めることができる。具体的には、 pt_3 の座標を (λ_3, y_3) (単位は (nm, count))、S の面積を $S[\text{nm} \cdot \text{count}]$ としたとき、波数単位で測った等価吸収幅は

$$w_\lambda = \frac{S}{y_3} \cdot \frac{1}{\lambda_3^2} \times 10^7 \text{ cm}^{-1} \quad (38)$$

となる。

コラム密度の算出

等価吸収幅が分かれば、教科書 28 ページの図 9c を用いて O_2 コラム密度 $N [10^{24} \text{cm}^{-1}]$ を求めることができる。

次に、幾何学補正を考える。今、測定時刻における太陽天頂角を χ とし、また光が 0.5 気圧高度で散乱されたとすると、教科書にある通り、光は $0.5 \cdot (1 + \sec(\chi))$ 気圧を通過したことになるので、求める鉛直コラム密度を $N_{\text{鉛}}$ とすれば

$$N_{\text{鉛}} \times 0.5 \cdot (1 + \sec(\chi)) = N \quad (39)$$

となる。よってこの関係式を用いて $N_{\text{鉛}}$ を推定することができる。

5.2.2 不確かさの推定方法

まず大前提として、この実験は非常に大雑把な実験であると言える。その理由としては以下のような原因が挙げられる。

- 雲模様や太陽天頂角が刻一刻と変化し、実験の条件が一定ではない
- 等価吸収幅を求めるために使う図形 S の頂点の位置の選び方が非常に恣意的である。
- 等価吸収幅からコラム密度を用いるためにグラフから数値を読み取ることになるが、これは定量的であるとは言い難い。
- 幾何学補正においては光の散乱高度を決める必要があるが、この決め方は実験者に委ねられている。

よって、最終的に酸素の混合比を求めて文献値と比較することになるが、この値が一致する可能性は非常に低いと予想され、不確かさを算出して誤差がその範囲内に収まるかどうかを確認する意味はあまりない。すなわち、この実験で算出される不確かさはあくまで、「どのぐらいのオーダーまで定量できたのか」を確認する程度の意味合いしか持たない。

以上のことに留意した上で、不確かさを求める方法を考える。

不確かさの算出

19ページで述べたように、「間接測定においてはできるだけ早い段階で測定値を平均に集約すべき」であり、ここでいう「できるだけ早い段階」とは「数値安定性の問題が生じないような、一番若い計算ステップ」のことを指す。今、5.2.1で示したコラム密度の計算方法を振り返ると、「測定値を平均に集約する作業」を行える最も早い段階は、「 $pt_1 \sim pt_5$ の座標 (pix,count)」を算出する段階である。（※x座標を波長にとった (nm,count) ではない。ピクセル番号の測定の段階で平均化するのが最も早い。）つまり今、3回の測定によって Figure13のような青線で囲まれた図形 S が3回分得られたとする。この時、測定値として $pt_1 \sim pt_5$ の座標が得られるわけであるが、三回分の測定から得られたこれらの座標を平均化することで、「図形 S の平均」を得ることができる。これが、本実験における「測定値を平均に集約することができる最も若い計算ステップ」である。

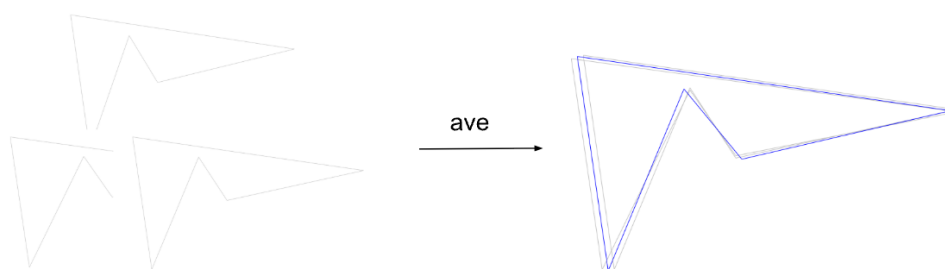


Figure15: ”図形 S の”平均をとる

以下では、この計算ステップから順に不確かさの伝播の様子を調べていき、数値安定性が悪いステップがないか検証する。

今、仮に pt_1 の座標の平均を求めることを考える。三回の測定による座標が (pix_1^i, y_1^i) (単位: (pix,count)) で与えられた時、平均化された図形 S の座標は当然に

$$(pix_1, y_1) = (\overline{pix_1^i}, \overline{y_1^i}) \quad (40)$$

で、この時の不確かさはそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma(pix_1) &= \sqrt{\sigma_{std}(\overline{pix_1^i})^2 + \sigma_{mem}^2} \\ \sigma(y_1) &= \sigma_{std}(\overline{y_1^i}) \end{aligned} \quad (41)$$

となる。ただし、 σ_{std} は標準不確かさであり、 σ_{mem} は (6) 式で定義した ccd カメラの分解能による不確かさである。

*9

ここに、Kr ランプによる波長較正で得られた式 $\lambda = a * pix + b$ を用いれば、 pt_1 の波長単位での座標 (λ_1, y_1) (単位: (nm,count)) を得ることが可能である。この時の $\sigma(\lambda_1)$ の不確かさは (21) 式と同様に、

$$\sigma(\lambda_1) = \sqrt{\overline{pix_1}^2 \sigma(a)^2 + a^2 \sigma(\overline{pix})^2 + \sigma(b)^2} \quad (42)$$

によって求めることができる。

また、 $pt_1 \sim pt_5$ の座標 (λ, y) が求めれば、それらを用いて pt_6, pt_7 の (λ, y) 座標を求めることができる。式は、例えば pt_6 を求める式なら、

$$\lambda_6 = \frac{-y_2 + y_1 + a_{23}\lambda_2 - a_{14}\lambda_1}{a_{23} - a_{14}}, \quad y_6 = y_1 + a_{14}(x_6 - x_1) \quad (43)$$

$$\text{ただし, } a_{23} = \frac{y_3 - y_2}{\lambda_3 - \lambda_2}, \quad a_{14} = \frac{y_4 - y_1}{\lambda_4 - \lambda_1}$$

のようになる。しかし、式 (43) を見ると、商や差が多分に含まれておりなんだか数値安定性が悪そう (値に対する相対的な誤差が大きくなってしまいそう) に見える。(厳密な、数値計算の分野における「数値安定性」の話とは少し違うので、(桁落ちとかそういう話をしているわけではないので、) 式をパッと見ただけで「誤差が相対的に増大するかどうか」はわからない。)

そこで、実際に、この計算ステップの数値安定性を見るために、実験で得られた値を用いて相対誤差を実際に計算してみることにする。今、(42) までの誤差伝播の式を用いて、実際に (λ_i, y_i) の値を求めてやると、例えば (λ_i, y_i) で、

$$\lambda_1 = 686.3 \pm 0.8 \text{ nm} \quad (44)$$

となる。

*9 pt_1 でのスペクトル強度 y_1 [count] の不確かさが標準不確かさのみで表されているのは、count 数メモリの分解能による不確かさは標準不確かさに比べてはるかに小さいからである。(ざっと見積もればすぐにわかる。) また、 y_1 に系統誤差が存在しないとしていることは、実験条件が一定であると近似的にみなしていることと同じであり、雲模様の変化や太陽天頂角の変化を無視していることを意味する。

この時、 λ_6 を求めてやると、*10

$$\lambda_6 = (7 \pm 6) \times 10^2 \text{ nm} \quad (46)$$

となり、相対誤差が100%近くまで増大してしまっていることがわかる。*11

よって、 pt_6, pt_7 を求めるこの計算ステップにおいては、誤差伝播により相対的な誤差が爆発的に増大してしまい、数値安定性が悪いことがわかる。よって、測定値を平均に集約するのはこれより後の計算ステップでなくてはならない。例えば、 $pt_1 \sim pt_7$ までの座標 (λ, y) を算出し、それらの平均を $\overline{pt_1 \sim pt_7}$ として平均に集約するなどである。

次に、今度は図形 S の面積を求める際の不確かさの伝播を考察する。まず、各辺の長さを求めるわけだが、この時の不確かさの伝播の式は簡単にもとまる。例えば線分 $\overline{pt_1 pt_2}$ の長さを求める場合を考えると、

$$\overline{pt_1 pt_2} = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (47)$$

であるから、不確かさは

$$\sigma(\overline{pt_1 pt_2})^2 = 2 \cdot \left\{ (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\sigma(\lambda_1)^2 + \sigma(\lambda_2)^2) + (y_1 - y_2)^2 (\sigma(y_1)^2 + \sigma(y_2)^2) \right\} \quad (48)$$

により求まることとなる。この式も、明らかに相対誤差が増大する形である。ルートの中の $y_1 - y_2$ などの項で桁が落ちることで不確かさが明らかに増大する。(若干形は違うが、本質的には式 (30) と同じ。) よって、測定値を平均に集約するのはこれよりもさらに後の計算ステップでなければならない。

この計算ステップの直後で、繰り返し測定を平均に集約できるような計量として一番初めに現れるのは、図14の各小さい三角形の辺の長さである。すなわち、各測定に対して線分 $\overline{pt_1 pt_2}$ などの長さを求め、それを平均に集約する、という手続きを考えることができる。

この場合の誤差の伝播の様子を調べるため、今辺 a, b, c の長さを用いて三角形の面積 $A = S_1, S_2, S_3$ を求めるという計算ステップについて考える。(a, b, c は、 $\overline{pt_1 pt_2}$ のような値が入る) この時の不確かさの伝播は、ヘロンの公式から考えて

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)^2 \sigma(s)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^2 \sigma(a)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^2 \sigma(b)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)^2 \sigma(c)^2} \\ \frac{\partial A}{\partial s} &= \frac{1}{2A} \left\{ (s-a)(s-b)(s-c) + s((s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a)) \right\} \\ \sigma(s) &= \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(a)^2 + \sigma(b)^2 + \sigma(c)^2} \\ \frac{\partial A}{\partial a} &= \frac{1}{2A} \left\{ -s(s-b)(s-c) \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

*10 誤差伝播の式は、

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda_6)^2 &= \left(\frac{-\lambda_1 + \lambda_6}{a_{23} - a_{14}}\right)^2 \left\{ \left(\frac{a_{14}\sigma(\lambda_1)}{\lambda_4 - \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{a_{14}\sigma(\lambda_4)}{\lambda_4 - \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(y_1)}{\lambda_4 - \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(y_4)}{\lambda_4 - \lambda_1}\right)^2 \right\} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (45)$$

のようになり、非常に煩雑になる。

*11 間接測定の計算式の形を見て、「相対的な誤差が増大するかどうか」をどう判断すれば良いのか、何かいい指標はないのだろうか。

のように求まる。^{*12} この誤差伝播が相対的な不確かさを大きくしてしまう数値不安定性を持つかどうかはやはりわからないので、実際に実験で得られた値を用いて計算してみる。例えば今、 pt_1, pt_2, pt_6 で形成される図14の赤色の三角形の面積 S_1 を実際の実験結果から求めてみる。まず、この小三角形の3片 a, b, c の長さを各測定の平均値として算出した時、

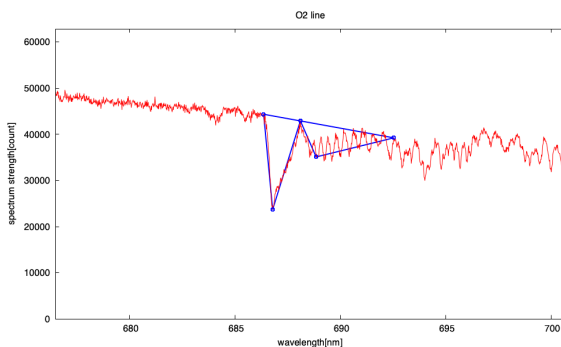
$$\frac{\sigma(a)}{a} \approx \frac{\sigma(b)}{b} \approx \frac{\sigma(c)}{c} \approx 0.1 \quad (50)$$

となっている。ここで次に、先の不確かさの伝播の式に従って $\sigma(S_1)$ を求めると、

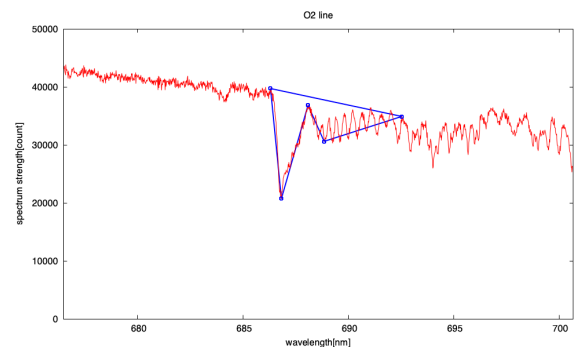
$$\frac{\sigma(S_1)}{S_1} \approx 10^6 \quad (51)$$

となっている。この結果を見ると、この計算ステップは数値的安定性が最悪である。(ただし、今回のこれは数式の問題というより、実験値の問題である。)^{*13} よってやはり、これより後で測定値を平均に集約する必要がある。

そこで次は、図14の各三角形の面積 S_1, S_2, S_3 を各測定に対して求め、それらを平均化する、というパターンを考えてみる。しかしこれには、 S_3 の不確かさという問題が生じてしまう。今、図14の緑色の三角形で表される S_3 の面積は非常に小さく、またスペクトルの形状に激しく左右される。(下図参照。一回目の測定では、帯原点が S の上側の青線に限らなく接近しており、これにより S_3 の面積が0に近くなってしまう。逆に、二回目の測定では帯原点と上側の青線の間十分にゆとりがあり、 S_3 は十分大きな値をとる。



(a) 一回目の測定におけるO₂ スペクトル



(b) 二回目の測定におけるO₂ スペクトル

Figure16

実際に今回の実験で、各測定に対して S_3 を求めてその平均値を S_3 の測定値として採用すると、

$$\frac{\sigma(S_3)}{S_3} \approx 1 \quad (52)$$

となり、 S_3 の相対誤差は100%に近くなっていることがわかる。よって、 S_1, S_2, S_3 を各測定に対して求め、それらを平均化することはしないことにする。

^{*12}mendokusai. だが、fortran を用いればそこまで苦痛というわけでもない。

^{*13}ヘロンの公式 $Area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ は桁が落ちるような項が特に含まれていないのに、ここまで数値安定性が悪いのは不思議に思える。実際、今回数値安定性がここまで悪くなったのは、式の形の問題というよりは、実験で得られた数値がたまたま最悪だっただけだということが、計算していく中で分かった。今、 pt_i と pt_j を結ぶ線分の(平均化された)長さを l_{ij} で表すと、今回の実験では $l_{16} + l_{26} \approx l_{12}$ となってしまう。(何度も計算式を確認したが、何度確認しても、完全なる偶然だと思われる。) これにより、ヘロンの公式内部の $(s - l_{12})$ が激しく桁落ちしてしまっていた。

次に、 $S = S_1 + S_2 - S_3$ の面積を各測定に対して求め、それらを平均化する、という手法を考えてみる。

この時、得られた S から等価吸収幅を式 (38) によって求めることができ、この時の不確かさは以下ようになる。(ただし、帯原点 (λ_3, y_3) は三回の測定の平均値を取ることにする。)

$$\sigma(w_\lambda) = \sqrt{w_\lambda^2 \left(\frac{\sigma(S)}{S} \right)^2 + w_\lambda^2 \left(\frac{\sigma(y_3)}{y_3} \right)^2 + (2w_\lambda)^2 \left(\frac{\sigma(\lambda_3)}{\lambda_3} \right)^2} \quad (53)$$

この時、 w_λ を与える式 (38) を見ると、これは観測値の積と商のみからなる式で、桁落ちなどの心配もないことからこの式で相対誤差が激しく増大してしまうことは無いと考えられる。実際、今回の測定では、

$$\frac{\sigma(S)}{S} \approx 0.04 \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma(w_\lambda)}{w_\lambda} \approx 0.1 \quad (54)$$

ようになっており、数値的にも安定である。

次に、教科書 p.28 図 9c を用いて等価吸収幅をコラム密度に変換する際の不確かさの伝播を考える。今、与えられた図中の曲線の式がわからない以上、不確かさの伝播の式を得ることはできない。そこで、図の縦横メモリの比から不確かさの伝播を求める。具体的には、図中で縦軸の 30cm^{-1} 分の長さが横軸のおおよそ $10.5 \times 10^{24}\text{cm}^{-2}$ の長さと同じことを利用して、等価吸収幅の不確かさ $\sigma(w_\lambda)$ の 1cm^{-1} 分が $(10.5/30) \times 10^{24}\text{cm}^{-2}$ の不確かさとして O_2 コラム密度 N の不確かさにあらわれると考えるのである。これにより、

$$\sigma(N) = \left(\frac{10.5}{30} \times 10^{24} \right) \sigma(w_\lambda) \quad (55)$$

のように不確かさが伝播すると考えられる。また、この計算ステップで相対不確かさが激しく増大してしまうことは考えにくい。

最後に、鉛直コラム密度の不確かさだが、この不確かさの伝播の式は式 (39) の形からすぐわかり、

$$\sigma(N_{\text{鉛}}) = \frac{1}{0.5 \cdot (1 + \sec(\chi))} \sigma(N) \quad (56)$$

となる。また、やはりこの計算ステップでも、相対不確かさが激しく増大してしまう可能性が低いことは容易に想像がつく。実際今回の実験で、式 (55) (56) の計算ステップを経た後の相対不確かさの変化を見てみると、

$$\frac{\sigma(w_\lambda)}{w_\lambda} \approx 0.12 \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma(N_{\text{鉛}})}{N_{\text{鉛}}} \approx 0.13 \quad (57)$$

のようになっており、相対誤差はほぼ変化していない。よって、 S の値を各測定に対して求め、その平均をとる、ということを行えば、それ以降の計算ステップには相対誤差が爆発的に増大するような数値的不安定性がない。よって、今回の実験において「測定値を平均に集約する作業」を行うのに最も相応しいステップは、「図13の青線で囲まれた図形の面積 S を求めるステップ」であると言える。

不確かさの算出まとめ

ここまで、「繰り返し測定で得た値を、どの段階で平均に集約させるべきか」という問題について考察してきた。結果、観測課題5においては、「図13の青線で囲まれた図形の面積 S を各測定に対して算出し、平均を取るのが良い」という結論に至った。

しかし、ここまでのプロセスを振り返ってみると、これは非常に時間のかかるプロセスである。一個一個の計算ステップに対し、数値的安定性がどうなっているか（相対誤差が爆発しないか）を確認していく作業は、非常に時間がかかる。あくまで今回は実験の考察の一環として、一つ一つの計算ステップを丁寧に追っていくという作業を行ったが、毎回これをやるのは非常に骨が折れる。

より実用的には、「以降の誤差伝播の計算が煩雑にならない」「以降の計算ステップに数値的安定性が悪い計算が出てこない」といった要件を満たす計算の段階を大雑把に判断して、その段階で「繰り返し測定で得た値を平均に集約させる」ことをすれば良いと考えられる。

例えば今回の観測課題4で言うと、 S より前の段階で出てくる物理量は座標であったり図形の辺の長さであったり図形の部分的な面積であったりと1以上の次元を持つ量であり、「平均に集約させる」ことで測定値がたった一つの量に収まるのは、計算の流れの中では S が初めてである。また、 S を求める前と後では計算の煩雑さが格段に異なっている。このようなことから、大雑把に考えても、やはり「繰り返し測定で得た値を平均に集約させる」のに最も適している量は S であると判断できる。

5.3 実験結果

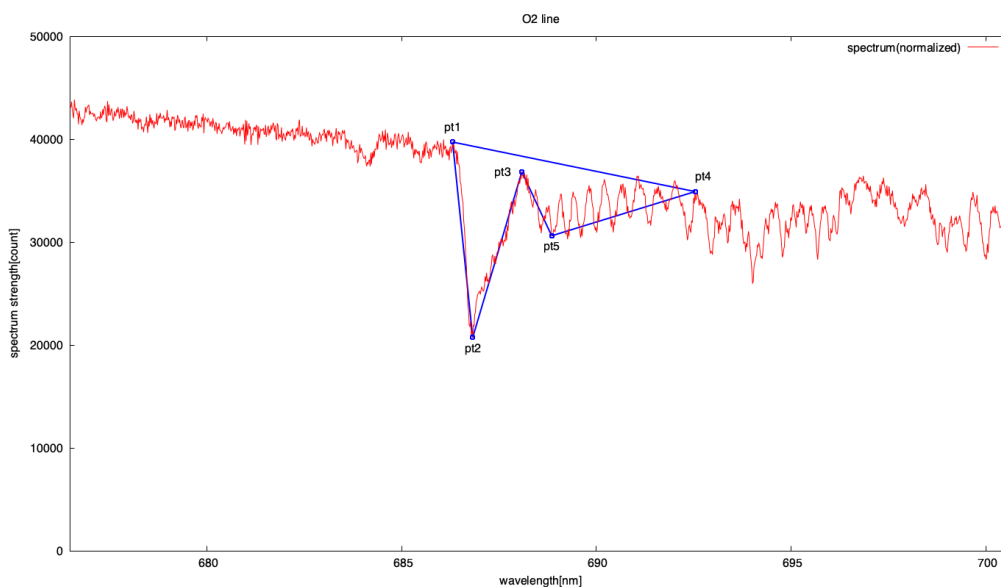
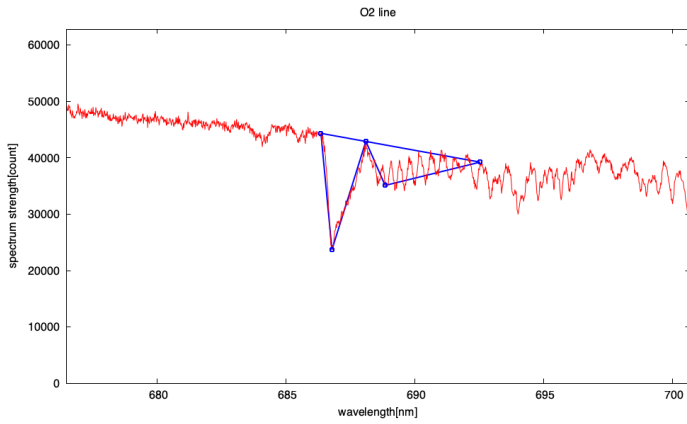


Figure17: O2 帯スペクトル

鉛直コラム密度を求めるための一連の計算方法については、すでに先の章で示したとおりである。すなわち、図17中の、 $pt_1 \sim pt_5$ の座標さえ得られれば、あとは順を追って計算していくことで鉛直コラム密度にたどり着くことができる。

今、各測定に対する $pt_1 \sim pt_5$ の座標 (λ, y) は以下のよう。^{*14}

^{*14}純粋な測定値は $(pix, count)$ であり、実験結果としてはこちらを載せた方が良かったとも考えたが、見にくかったため波長補正後の結果 $(\lambda, count)$ を表示した。

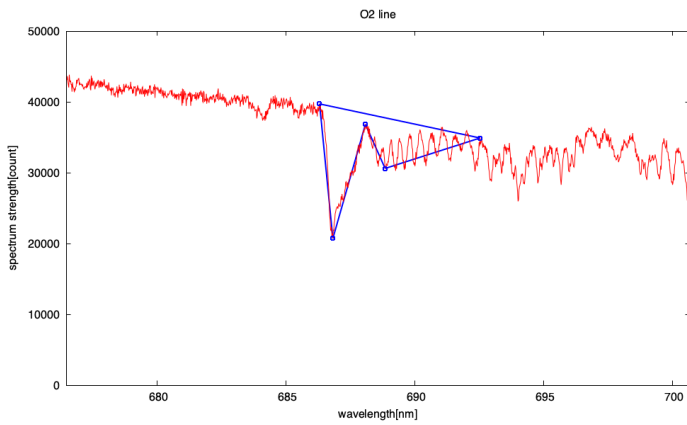


(a) O₂ スペクトル

pt	波長 λ [nm]	スペクトル強度 y [count]
pt ₁	686.361	44354
pt ₂	686.788	23710
pt ₃	688.104	42938
pt ₄	692.533	39246
pt ₅	688.851	35114

(b) 各点の座標

Figure18: 1回目

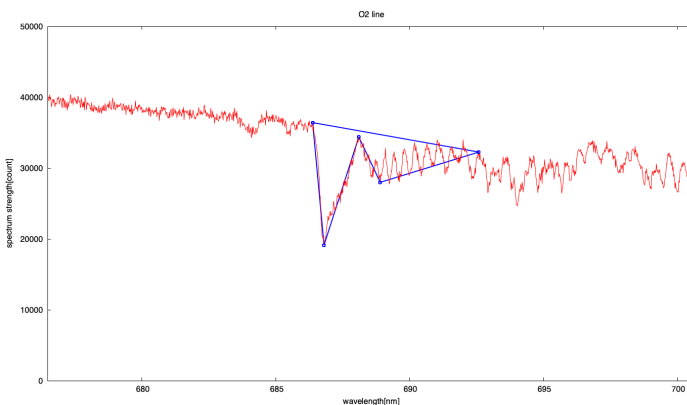


(a) O₂ スペクトル

pt	波長 λ [nm]	スペクトル強度 y [count]
pt ₁	686.307	39752
pt ₂	686.823	20747
pt ₃	688.086	36868
pt ₄	692.533	34940
pt ₅	688.851	30642

(b) 各点の座標

Figure19: 2回目



(a) O₂ スペクトル

pt	波長 λ [nm]	スペクトル強度 y [count]
pt ₁	686.379	36441
pt ₂	686.805	19164
pt ₃	688.104	34418
pt ₄	692.586	32287
pt ₅	688.904	28016

(b) 各点の座標

Figure20: 3回目

よって、これらの結果を用いて青線で囲まれた図形の面積 S を求めてやると、以下ようになる。

測定回	S [nm · count]
1回目	33554
2回目	33960
3回目	30662

Figure21: S の測定値

よって、これらの測定値の平均を今 S の値として採用し、不確かさとして標準不確かさを用いれば、

$$S = (3.3 \pm 2) \times 10^4 \text{ nm} \cdot \text{count}, k = 2 \quad (58)$$

となる。あとは、先の章で示したとおりに計算してゆけば、

$$\begin{aligned} w_\lambda &= 18 \pm 4 && \text{cm}^{-1} \\ N &= (6 \pm 1) \times 10^{24} && \text{cm}^{-2} \\ N_{\text{鉛}} &= (2.9 \pm 0.8) \times 10^{24} && \text{cm}^{-2} \end{aligned} \quad (59)$$

となる。(ただし、包含係数は全て $k = 2$ 。また、 $N_{\text{鉛}}$ を求める過程で太陽天頂角が必要になるが、これに際しては、本実験を行なった時刻 3:28 を用いて、NOAA Solar Position Calculator^{*15}を使い計算した。)

5.4 物理量の定量及び誤差の評価

5.4.1 酸素分子鉛直コラム密度

改めて、酸素分子鉛直コラム密度は包含係数を $k = 2$ として

$$N_{\text{鉛}} = (2.9 \pm 0.8) \times 10^{24} \text{ cm}^{-2} \quad (60)$$

である。

5.5 考察

5.5.1 鉛直コラム密度の妥当性について

教科書で指示されているとおり、鉛直コラム密度を用いて大気酸素濃度を求めることで、今回得られた鉛直コラム密度の「答え合わせ」を試みることにする。

今、断面積 1cm^2 の気柱に含まれる酸素の質量 $W_{\text{O}_2}[\text{g}]$ は、酸素の分子量を $n_{\text{O}_2}[\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}]$ 、アボガドロ定数を N_A とすれば

$$W_{\text{O}_2} = N_{\text{鉛}} \times \frac{n_{\text{O}_2}}{N_A} \quad (61)$$

となる。また、この気柱の総質量 $W_{\text{Air}}[\text{g}]$ の重さが地表にのしかかっている（すなわち地表大気圧と釣り合っている）

^{*15}<https://gml.noaa.gov/grad/solcalc/azel.html>

と考えれば、重力加速度を g として、

$$\frac{W_{\text{Air}} \times 10^{-3} \times g}{(10^{-2})^2} = 1013 \times 10^2 \quad (62)$$

となる。よって、これらの式を変形して、

$$\frac{W_{\text{O}_2}}{W_{\text{Air}}} = \frac{N_{\text{鉛}} \times n_{\text{O}_2} \times g}{N_A \times 1013 \times 10} \quad (63)$$

のように、酸素分子の大気中に対する質量比が得られる。よって、これに具体的な数値を代入し、また計算した $N_{\text{鉛}}$ の不確かさを伝播させれば、

$$\frac{W_{\text{O}_2}}{W_{\text{Air}}} = 0.15 \pm 0.04, \quad k = 2 \quad (64)$$

となる。今、文献値^{*16}は

$$\frac{W_{\text{O}_2}}{W_{\text{Air}}} = 0.2314 \quad (65)$$

であるから、理論値と実測値の間には不確かさでは説明できない誤差が存在している。よって、答え合わせは「失敗」である。

5.5.2 幾何学補正の修正

23ページですでに述べたように、本実験は非常に多くの問題を抱えており、文献値と実測値の値が一致しないのはなんら不自然ではない。その理由も、23ページで述べたとおりである。その上で、今回は特に、幾何学補正の恣意性についての考察を行う。

今回の実験で用いた幾何学補正では、太陽光が 0.5 気圧で散乱されると考え、

$$N_{\text{鉛}} = \frac{N}{0.5 \cdot (1 + \sec(\chi))} \quad (66)$$

と近似した。しかしこの散乱高度は実験者が勝手に決めた値であり、実際の散乱高度は 0.5 気圧とは全然異なった値かもしれない。そこで今回、仮に b 気圧高度で散乱が起こったと仮定してみる。するとこのとき、

$$N_{\text{鉛}} = \frac{N}{(1 - b) + b \cdot \sec(\chi)} \quad (67)$$

である。よって、(67) 式と (63) と用いて b について解くことができ、

$$b = \frac{1}{\sec(\chi) - 1} \left(\frac{1}{W_{\text{O}_2}/W_{\text{Air}}} \frac{N \times n_{\text{O}_2} \times g}{N_A \times 1013 \times 10} - 1 \right) \quad (68)$$

のようになる。よって $W_{\text{O}_2}/W_{\text{Air}}$ に文献値を代入してやると、 b の具体的な数値が求まり、

$$b = 0.14 \quad (69)$$

^{*16}<https://www.env.go.jp/earth/coop/coop/document/02-apctmj1/02-apctmj1-011.pdf>

となる。(0.5 気圧よりずっと高い気圧高度である。) 逆に言えば、大気が 0.14 気圧高度で散乱されたと仮定すれば、今回の実験で求めたコラム密度から大気酸素分子濃度を計算したときに文献値に一致することになる。

また別の見方として、 $b = 0.14$ を、「今回の実験で測定した太陽光スペクトルが実際に散乱した高度」と見做すこともできる。すなわち、「本来光は 0.14 気圧高度で散乱していたにも関わらず、0.5 気圧高度で散乱したと言う近似を用いてしまったことによって、文献値通りの大気分子濃度を得ることができなかった」と言う見方ができる。しかし、23 ページで述べたように、本実験は非常に大雑把であり、理論値と文献値に差が出た理由の全てを幾何学補正に押し付けるのはよろしくない。よって b の値については、「光の散乱が起きた高度は少なくとも 0.5 気圧高度よりも高い」程度に受け取っておくのが良いと思われる。

6 観測課題 6

6.1 理論

観測課題 5 では等価吸収幅を用いてコラム密度を測定したが、ここでは異なる太陽天頂角におけるスペクトルを測定することでコラム密度を測定することを考える。詳しい理論についてはすでに教科書に示されている通りである。

6.2 実験方法

6.2.1 O₃ コラム密度の測定

今回、観測課題 3 で得られたオゾンの昼と夕方のスペクトルの比をとり、以下のようなスペクトルが得られた。

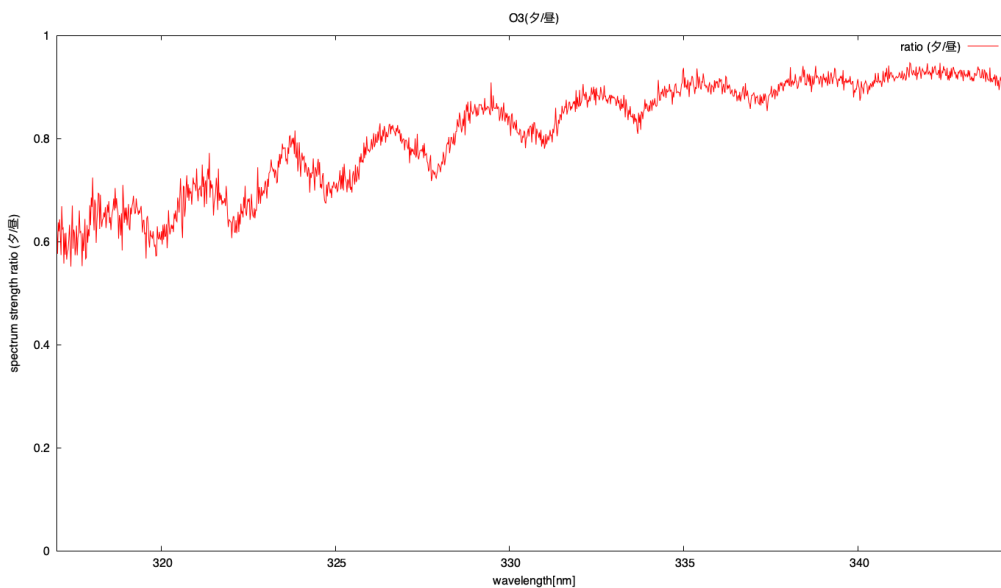


Figure22: O₃ スペクトル比

この時、教科書によれば、昼夕に関してスペクトルの比をとった際の値は

$$r = \frac{g_{夕}(\lambda)}{g_{昼}(\lambda)} e^{-N\sigma(\lambda)(\sec \chi_{夕} - \sec \chi_{昼})} \quad (70)$$

のようになる。この時、

$$f(x) := \frac{-1}{\Delta \sec \cdot N} \log \left\{ \left(\frac{g_{夕}(\lambda)}{g_{昼}(\lambda)} \right)^{-1} (x) \right\} \quad (71)$$

という変換 f を定義すると、

$$f(r(\lambda)) = \sigma(\lambda) \quad (72)$$

のように変換され、吸収断面積のグラフに帰着される。

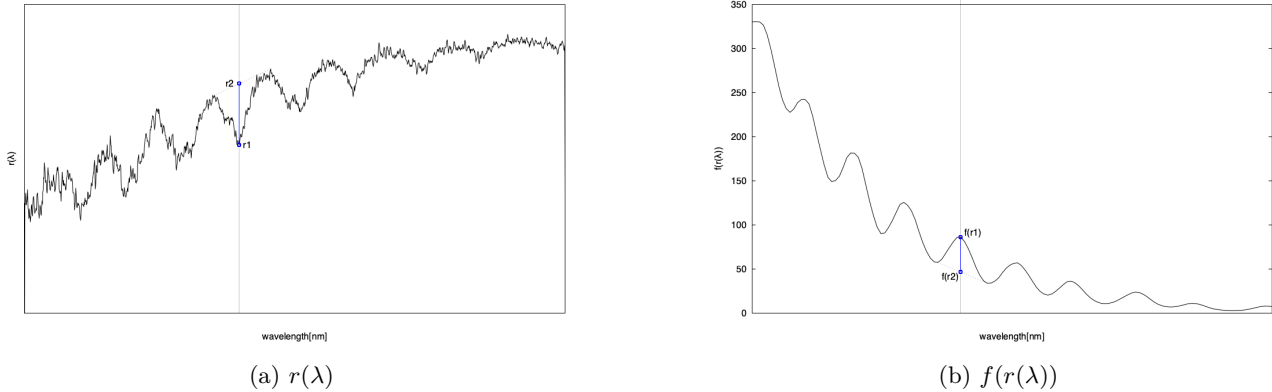


Figure23: 変換: f

今、変換前の $r(\lambda)$ と変換後の $f(r(\lambda)) = \sigma(\lambda)$ を上図に示した。この変換で、図に示したようにある λ 上の二点 r_1, r_2 が $f(r_1), f(r_2)$ に写る場合を考える。

この時、線分 $\overline{f(r_1)f(r_2)}$ の長さは

$$\begin{aligned} \overline{f(r_1)f(r_2)} &= f(r_1) - f(r_2) \\ &= \frac{-1}{\Delta \sec \cdot N} \log \left\{ \left(\frac{g_{\text{夕}}(\lambda)}{g_{\text{昼}}(\lambda)} \right)^{-1} (r_1) \right\} - \frac{-1}{\Delta \sec \cdot N} \log \left\{ \left(\frac{g_{\text{夕}}(\lambda)}{g_{\text{昼}}(\lambda)} \right)^{-1} (r_2) \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta \sec \cdot N} \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (73)$$

となる。特に、 r の変換後の関数である $\sigma(\lambda)$ が与えられている時は、 $\overline{f(r_1)f(r_2)} = \Delta\sigma$ は既知であり、よって r_1, r_2 の座標が求まれば

$$N = \frac{1}{\Delta \sec} \frac{\Delta \log r}{\Delta \sigma} \quad (74)$$

により O_3 コラム密度を求めることができる。

6.3 不確かさについて

今回の実験においても繰り返し測定を用いており、観測課題5と同様に「計算のどの段階で測定値を平均に集約させるか」を考えなければいけない。しかし今回は、観測課題4の時のように逐一計算プロセスの数値安定性を追いかけるようなことはしない。すなわち、28ページで述べたように、どこで平均を取るべきかを大雑把に見積もってみることにする。

今、ある物理量について繰り返し測定により複数の測定値を得た上で、平均をとることを考える。この物理量を x とおく。28ページの議論を思い出すと、このような x に求められる要件は「以降の計算において誤差伝播の式が煩雑にならないこと」「以降の計算で数値安定性が悪い計算ステップが出てこないこと」であった。そこで、6.2.1の議論を

振り返ってみると、 $\log(r_2/r_1)$ について平均を取る（各測定に対して $\log(r_2/r_1)$ を算出し、その平均値を測定値とする）のが良さそうである。これは、仮に $\log(r_2/r_1)$ より前の計算の段階で現れる物理量（ r_1, r_2 の座標や、昼夕比を取る前のスペクトル強度など）に関して平均を取ってしまうと、 $\log(r_2/r_1)$ を計算するステップで相対誤差が爆発してしまう恐れがあるからである。すなわち今、

$$\log(r_2/r_1) = \log r_2 - \log r_1 \quad (75)$$

であり、同じ次元の差をとる計算は式 (30) で見たように、桁落ちによって相対誤差が爆発的に大きくなってしまう可能性を孕んでいる。よって、この計算を避けるために、 $\log(r_2/r_1)$ は各測定に対して求め、その平均をとると言う作業を行うことにする。また、以降の計算において誤差伝播の式は非常に簡潔になることが式の形からわかるので、やはりこのタイミングで平均を取るのが良さそうである。

6.4 実験結果

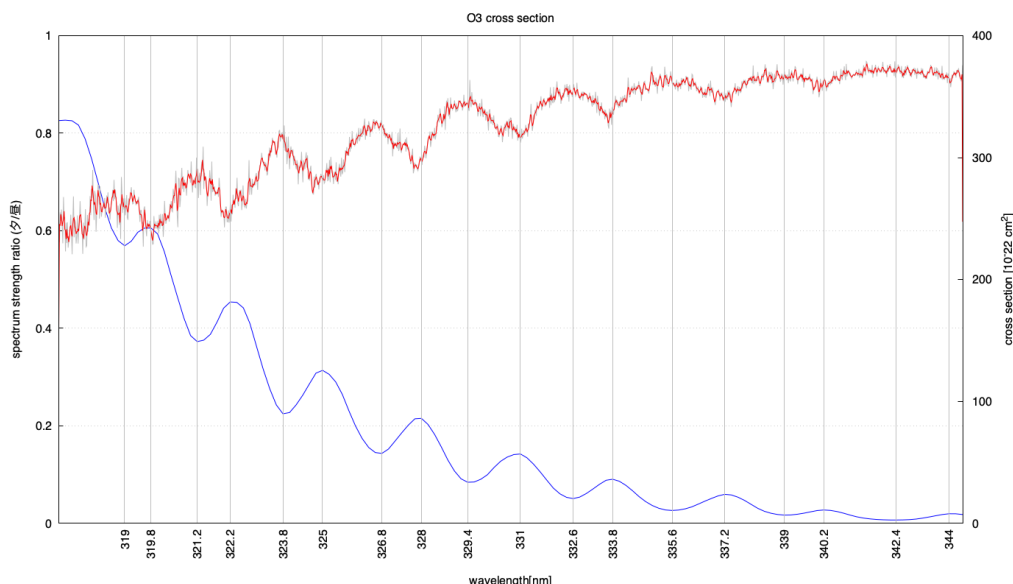


Figure24: O_3 スペクトルと吸収断面積

上手は、 O_3 スペクトルと吸収断面積と吸収断面積の比較である。赤いスペクトルは、昼と夜それぞれに対して三回測定の平均のスペクトルを算出し、その比を取って平滑化したものである。（あくまで吸収波長の位置が吸収断面積のグラフと対応しているかどうかを見るためのグラフ）この図をみると、実験で得られたスペクトルと吸収断面積のスペクトルは凹凸のピークが来る位置が全体的にしっかり一致しており、二つのグラフが変換 f によって結び付けられていることが確認できる。

ここからは、実際にコラム密度を計算していく。今、 O_3 に関するスペクトルの測定は昼と夕方3セットずつ行った。よって、それぞれのセットを昼と夕方でペアと考え、計3つのペアに対して、 $\log(r_2/r_1)$ の値を算出することにした。^{*17} また、S/N比を改善するために、スペクトルは $n=3$ で平滑化する。また、図23aの縦線の位置で示されるような、「 r_1, r_2 の値を算出するために用いるスペクトルの谷」については、328nmのものを用いることにした^{*18}。また、 r_1, r_2 を求めるには、局所近似的な考え方をを用い、吸収ピークの両隣の山の頂点を結んだ直線の式を求める必要が

^{*17}昼と夕のペアを入れ替えて測定回数を上げると言うやり方も考えられるが、観測課題4に時間をかけすぎたせいで余裕がなくなってしまったので、今回は行わない。

^{*18}一番吸収がはっきりしていると感じたため。

あるが、trivial な計算なので省略する。

今回の実験により得られた $\log(r_2/r_1)$ の値は以下のよう。

測定回	$\log(r_2/r_1)$
一回目	0.161
二回目	0.184
三回目	0.194

Figure25: 実測値

よって、平均及び不確かさを求めると、

$$\log(r_2/r_1) = 0.18 \pm 0.03, \quad k = 2 \quad (76)$$

となっている。

今、吸収断面積のグラフは、328nm を中心とする山において $\Delta\sigma = 39.6 \times 10^{-22} \text{cm}^2$ となっている。また、昼、夜それぞれの測定時間における太陽天頂角 $\chi_{\text{昼}}, \chi_{\text{夜}}$ の値は、

$$\cos(\chi_{\text{昼}}) = 0.1269, \quad \cos(\chi_{\text{夜}}) = 0.5566 \quad (77)$$

を満たす。よって、これらの値を用いれば、(74) 式に従って O_3 の鉛直コラム密度がもとまり、

$$N_{\text{垂}} = (7 \pm 1) \times 10^{18} [\text{cm}^{-2}], \quad k = 2 \quad (78)$$

として与えられる。

6.5 物理量の定量及び誤差の評価

6.5.1 オゾンの鉛直コラム密度

※ 式 (78) で求めた通り。

6.6 考察

今、 $N_{\text{垂}}$ をドブソンユニットに変換すると

$$N_{\text{垂}} = (2.8 \pm 0.5) \times 10^2 [D.U.], \quad k = 2 \quad (79)$$

となる。教科書 31 ページのオゾンコラム密度の季節分布を確認すると、10 月の東京の緯度におけるオゾン濃度はおおよそ 300 ドブソンユニットであるから、実験値はこの値をよく再現してると言える。($k = 1$ でも誤差が不確かさの範囲内に収まる。) *19

*19 時間配分を間違えて課題 6 の考察に割ける時間が少なくなってしまった。悔しい。